

# · 破解悖論！

面對悖論就是面對現實。

學號：107072243  
系級：經濟 22  
姓名：鄭宇暄

## 悖論如何出現的？

人類的直覺遵守「因果邏輯」，  
資料遵守「機率」和「比例邏輯」。

而我們誤把某個領域學到的法則，套用在另一個領域了。

因果悖論凸顯出機率和邏輯衝突的直覺是因果推理型態。

目錄

Monty Hall paradox  
Simpson's paradox

# Monty Hall paradox

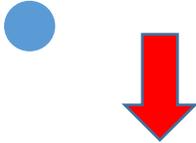
《來做個交易吧！》

假設你正在參加遊戲節目，要從三扇門中選擇一扇。其中一扇門裡面是汽車、另一扇是山羊。你選擇了 1 號門後，已經知道門裡面有甚麼的主持人打開 3 號門，門裡面是山羊。這時主持人說：「你想換 2 號門嗎？」請問這時換另一扇門有利嗎？

沙凡：

來賓應該要換。如果不換，中獎機率只有  $1/3$ ，換成另一扇門，中獎機率將提高到  $2/3$ 。

沙凡的解答：



1 號門	2 號門	3 號門	換門的結果	不換門的結果
汽車	山羊	山羊	輸	贏
山羊	汽車	山羊	贏	輸
山羊	山羊	汽車	贏	輸

批評的看法：

換或不換應該沒有關係，因為現在只剩兩扇門，而你已經隨機選了一扇門，所以汽車在你選的門的後面的機率一定是  $1/2$ 。

究竟哪個對？

解決悖論的關鍵：

不僅必須考慮資料（也就是主持人打開了某一扇門），  
還要考慮資料產生的過程。



遊戲規則

改變規則：《來做個假交易吧！》

主持人在節目中打開你沒選擇的兩扇門之一，但他的選擇完全隨機。

各種可能性：

你選擇的門	有汽車的門	主持人打開的門	換門的結果	不換門的結果
1	1	2	輸	贏
1	1	3	輸	贏
1	2	2	輸	輸
1	2	3	贏	輸
1	3	2	贏	輸
1	3	3	輸	輸

在新規則下，即使狀況相同，換門也不會比較有利。

在新規則下，批評者是對的！



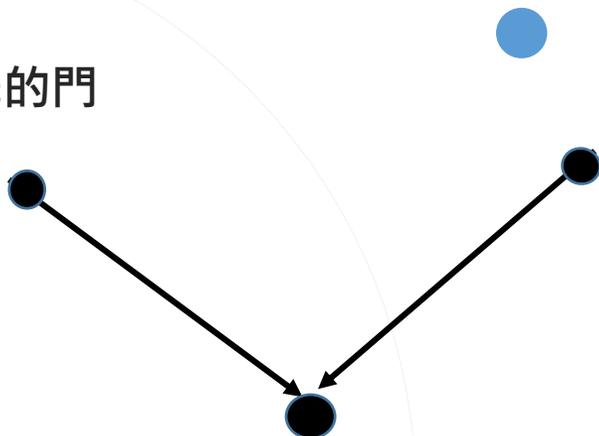
取得資料的「方式」跟資料本身一樣重要！

## 《來做個交易吧！》因果圖：

你選擇的門

汽車位置

打開的門



MONTY HALL 悖論：

利用我們的認知機制來欺騙我們。

因為沒有原因的相關違反我們的常識。

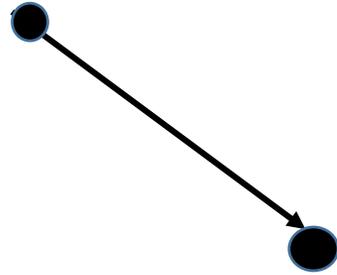
貝氏分析主旨：

任何假設一旦通過可能威脅其正確性的檢驗，其可能性就會提高。威脅越大，通過檢驗後的可能性就越高。

《來做個假交易吧！》因果圖：

你選擇的門

汽車位置



打開的門

從貝氏來看，兩者差異在於「一號門可以被證實為假」。

《來做個交易吧！》  $P(2號門) = 2/3$

《來做個假交易吧！》  $P(2號門) = 1/2$

1991年，史丹佛大學統計學家派西·迪亞柯尼斯說：「我們的大腦不擅長處理機率問題，所以他出錯不足為奇。」

但我們很擅長處理因果問題，而這能力往往造成視幻象這類的系統性機率錯誤。



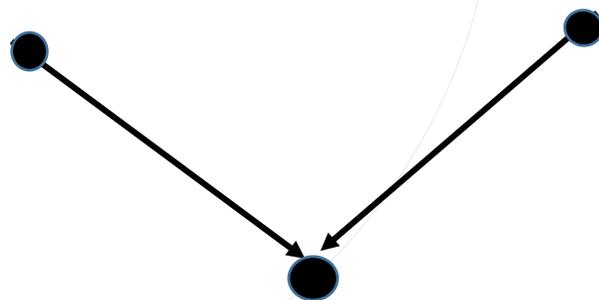
## 柏克森悖論

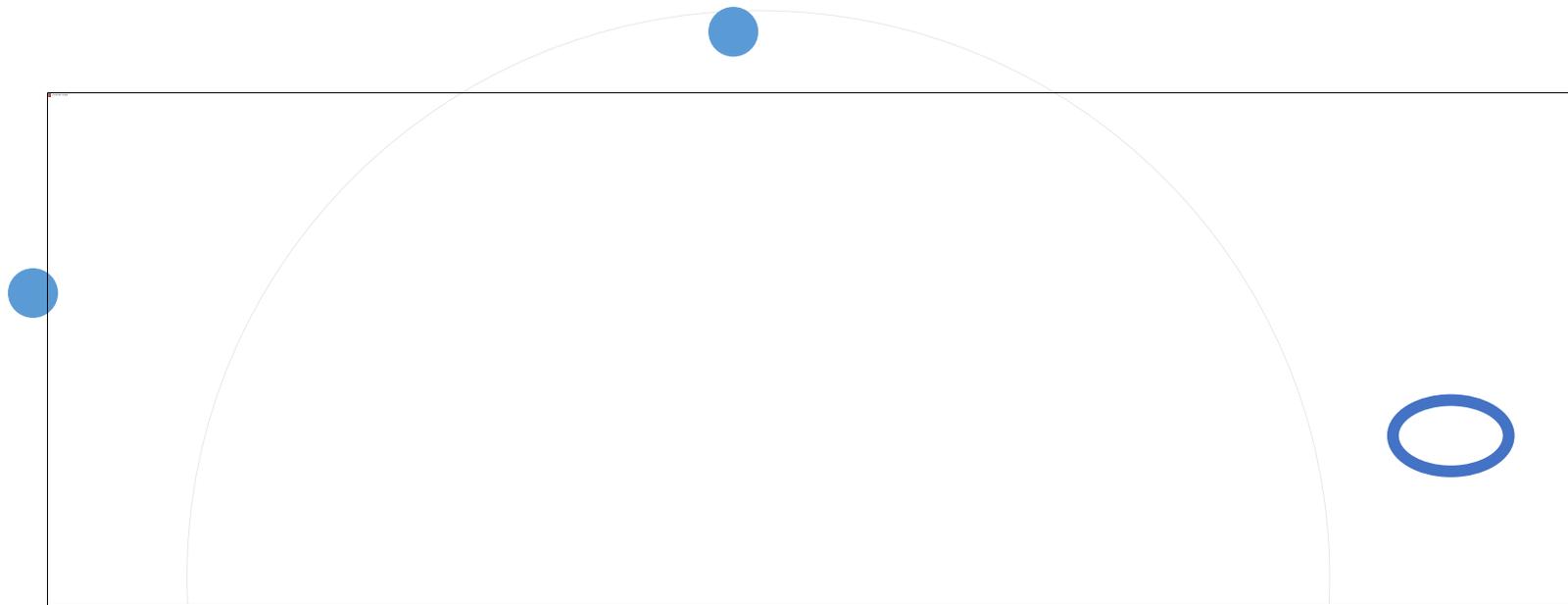
- 醫院的某種現象：某兩種疾病即使在一般大眾中互不相關，在醫院患者中卻往往有相關。

疾病一

疾病二

住院



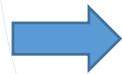


薩克特稱其為「入院率偏差」或「柏克森偏差」。

衝突造成的相關：

- 1911：比較父母酗酒與不酗酒的兒童
- 同時扔 2 枚硬幣100次，但只在至少一枚出現正面時寫下結果。表格中大概會有 75 個結果，可以看出同持拋 2 枚硬幣的結果並非獨立。

證明



藉由「取消所有反面結果」來以衝突執行條件化。

德國哲學家 漢斯·萊興巴赫《時間的方向》：提出**共同原因原理**，反駁「相關未必蘊含因果」，「**任何相關都有因果**」。

萊興巴赫的錯誤在於它沒有考慮衝突結構，也就是選擇資料的結構。

這也是人大腦的缺陷，我們總會認為共同原因原理是正確的，一看到固定型態，就想找因果解釋。

喬登·艾倫伯格《數學教你不犯錯》：

我們交往過的人當中，有魅力的通常都很差勁。選擇交往對象因素：魅力、個性

我們會冒險跟 個性差但有魅力 或 個性好但無魅力 的人交往。

我們不會選擇 個性差且沒魅力 的人。

其實跟 有魅力但個性差 的人一樣多，但我們永遠也不會知道。  
(硬幣兩個反面)

# 辛普森悖論：壞 / 壞 / 好 ( B B G ) 藥物迷思



患者自己決定是否服用藥物

對照組中 5 % 的女性 ( 1 / 20 ) 罹患心臟病，服用藥物的女性 7.5 % 罹患。



在女性中有高關聯

對照組中 30 % 的男性 ( 12 / 40 ) 罹患心臟病，服用藥物的男性 40 % 罹患。



在男性中有高關聯

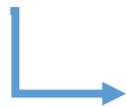
若看全體，對照組 22 % ( 13 / 60 )，處理組 18 %



反而降低整體的心臟病風險！

# 因果原理錯誤套用到統計比例

區分「辛普森逆轉」和「辛普森悖論」



兩組資料合併後，特定事件的相對機率出現逆轉的現象。

舉例：

$$\text{女性：} 3 / 40 > 1 / 20$$

$$\text{男性：} 8 / 20 > 12 / 40$$

$$\text{總體：} (3 + 8) / (40 + 20) < (1 + 12) / (20 + 40)$$

證明：

$$\text{若 } A / B > a / b \text{ 且 } C / D > c / d, \\ \text{則 } (A + B) / (B + D) > (a + b) / (b + d)$$

想法是錯的！

## 必然原理 ( Sure-thing principle )

### 統計學家李奧納德·薩瓦吉

「一名業務員正在考慮買進商品。他認為下次總統大選結果將造成影響，因此為了整清狀況，他自問如果他要知道民主黨候選人將會勝出的話是否會買進，考慮之後決定買進。同樣地，他也想了如果他知道共和黨候選人會勝出的話是否會買進，結果還是決定買進。他知道自己無論如何都會買進，因此確定應該買進，但其實如同我們常說的，他不知道最後哪個事件會成立。我們通常很少依據這個原理做出決定。但是.....我沒聽過其他超級合乎邏輯的決策原理有這麼受歡迎。」

假設選項為 A 房產和 B 房產。

民主黨獲勝：5 % 機會由 A 賺到 \$ 1，8 % 機會由 B 賺到 \$ 1  B 比 A 有利可圖

共和黨獲勝：30 % 機會由 A 賺到 \$ 1，40 % 機會由 B 賺到 \$ 1  B 比 A 有利可圖

 定然買進 B 商品

## 回到 B B G 藥物

三個敘述：

藥物 D 提高男性和女性得心臟病的機率

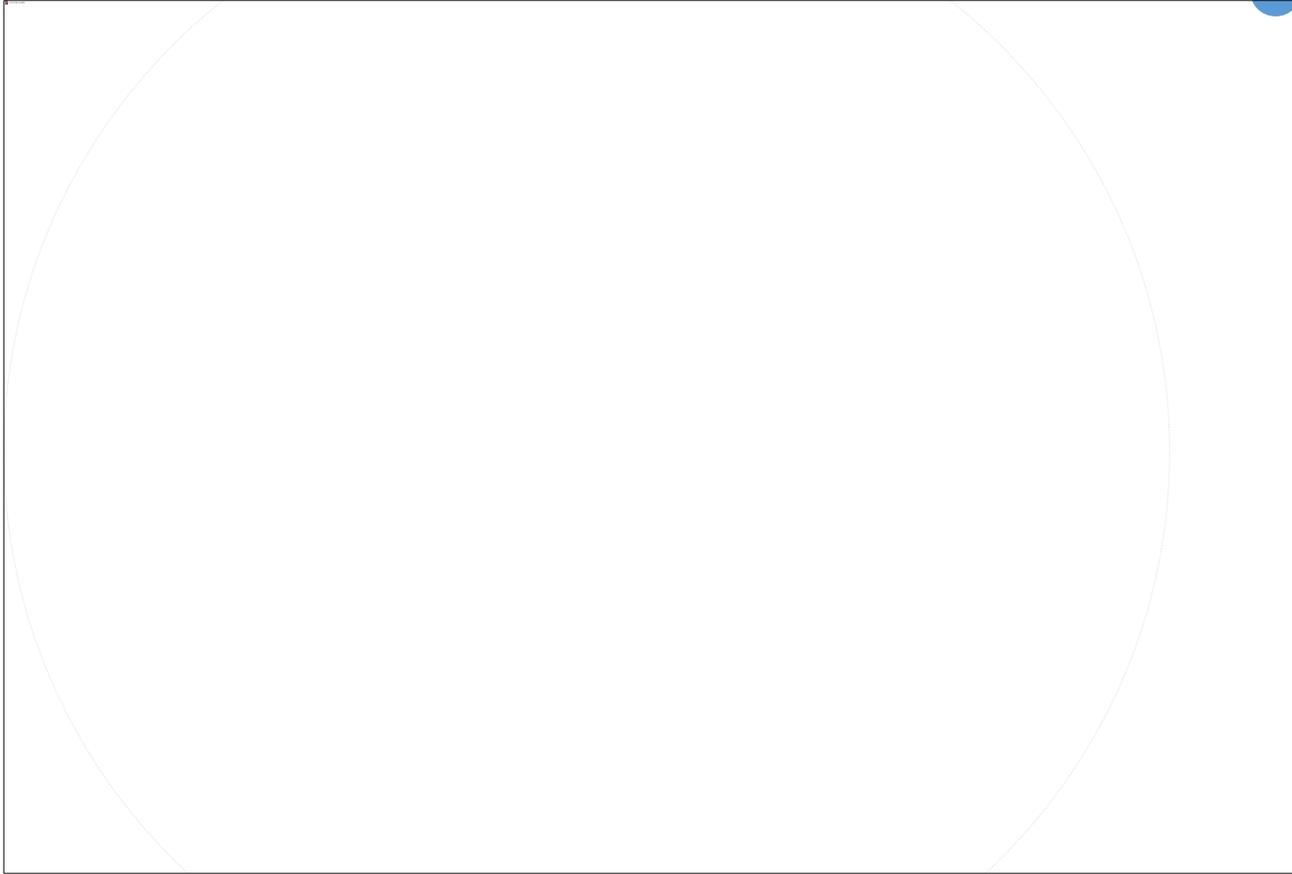
藥物 D 提高所有人得心臟病的機率

藥物 D 不會改變男性和女性人數

- 女性不服用藥物 D 時，心臟病比例是 5%，服用時是 7.5%。
- 男性不服用藥物 D 時，心臟病比例是 30%，服用時則為 40%。
- 取兩者的平均值（因為男性和女性在一般大眾中比例相同），不服用藥物 D 的心臟病比例為 17.5%（5% 和 30% 的平均值），服用時的心臟病比例則為 23.75%（7.5% 和 40% 的平均值）。

我們的就是這樣明確而不含糊的答案。藥物 D 不是 BBG，而是 BBB，它對女性，男性和所有人都不好。

## 以圖說明辛普森悖論：運動 V S. 膽固醇

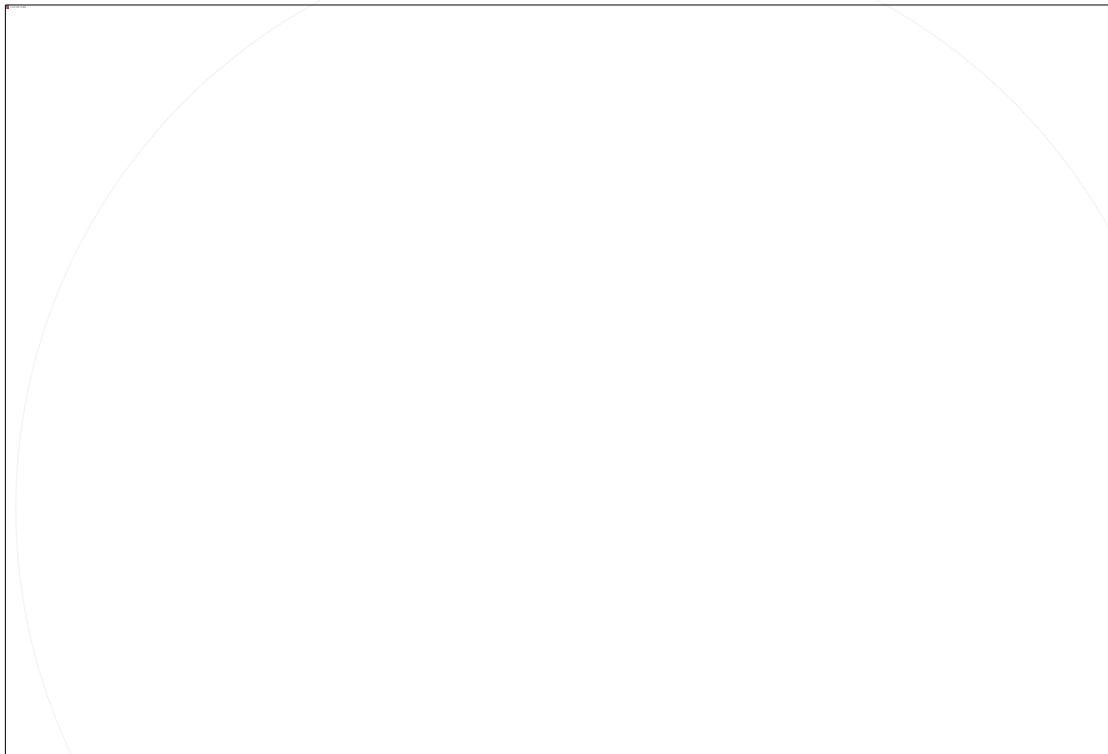


年齡是運動跟膽固醇的干擾因子

- > 應以「年齡執行對照」
- > 觀察以年齡劃分的資料，並斷定運動有益，與年齡無關

# 以圖說明辛普森悖論：食堂伙食 V S. 體重

(由直線  $W_f = W_i$  [最終體重=最初體重] 周圍的散布圖呈對稱狀態可知)



● 佛里德瑞克·羅德：虛構範例

第一位： ( V )

女生六月和九月時平均體重相同。

當然，某些女生可能體重減輕或增重，但平均體重增加量為0。男生的狀況也相同。

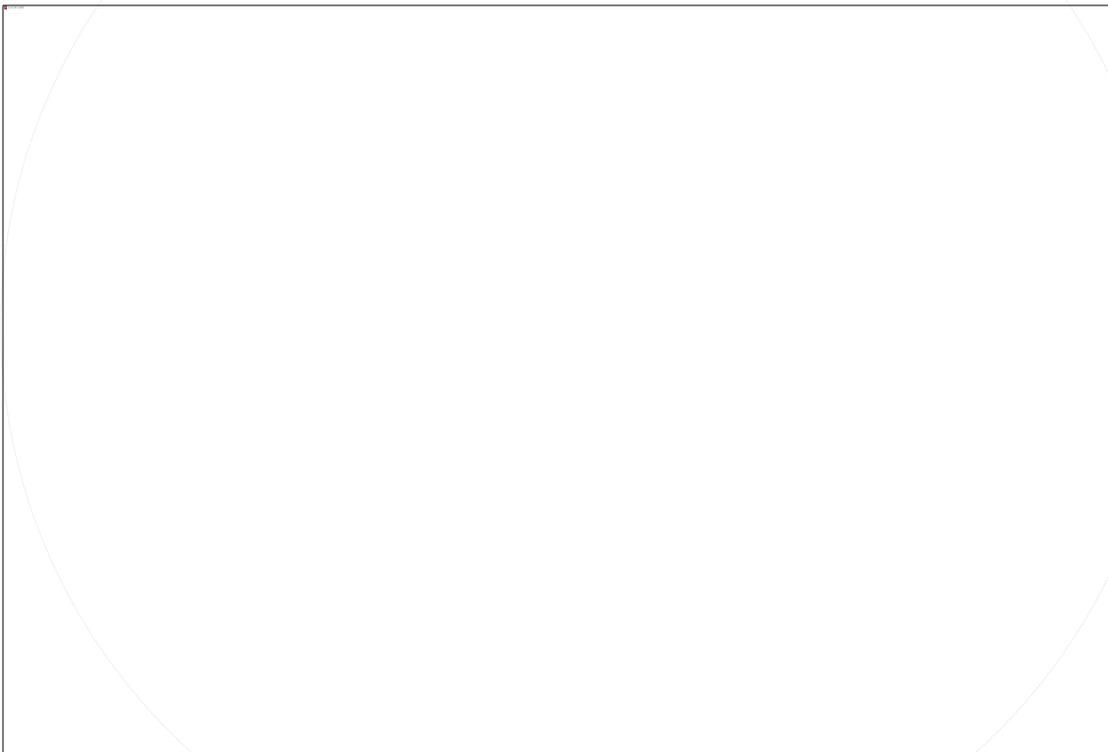
因此這位統計學家斷定，學校伙食對男女生影響相同。

第二位：

由於學生的最終體重受最初體重影響極大，所以我們應該依最初體重將學生分組。如果畫一條通過這兩個橢圓形的垂直線，相當於只看特定最初體重的男生和女生 ( $W_0$ )，會發現這條垂直線與「男生」橢圓的交點高於和「女生」橢圓的交點。這代表最初體重為  $W_0$  的男生，後來的最終體重 ( $W_p$ ) 普遍高於最初體重為  $W_0$  的女生。

- > 依照慣例，第二位統計學家斷定，把男女生最初體重差異列入考量後，男生體重增加幅度明顯大於女生。

## 以圖說明辛普森悖論：食堂伙食 V S. 體重



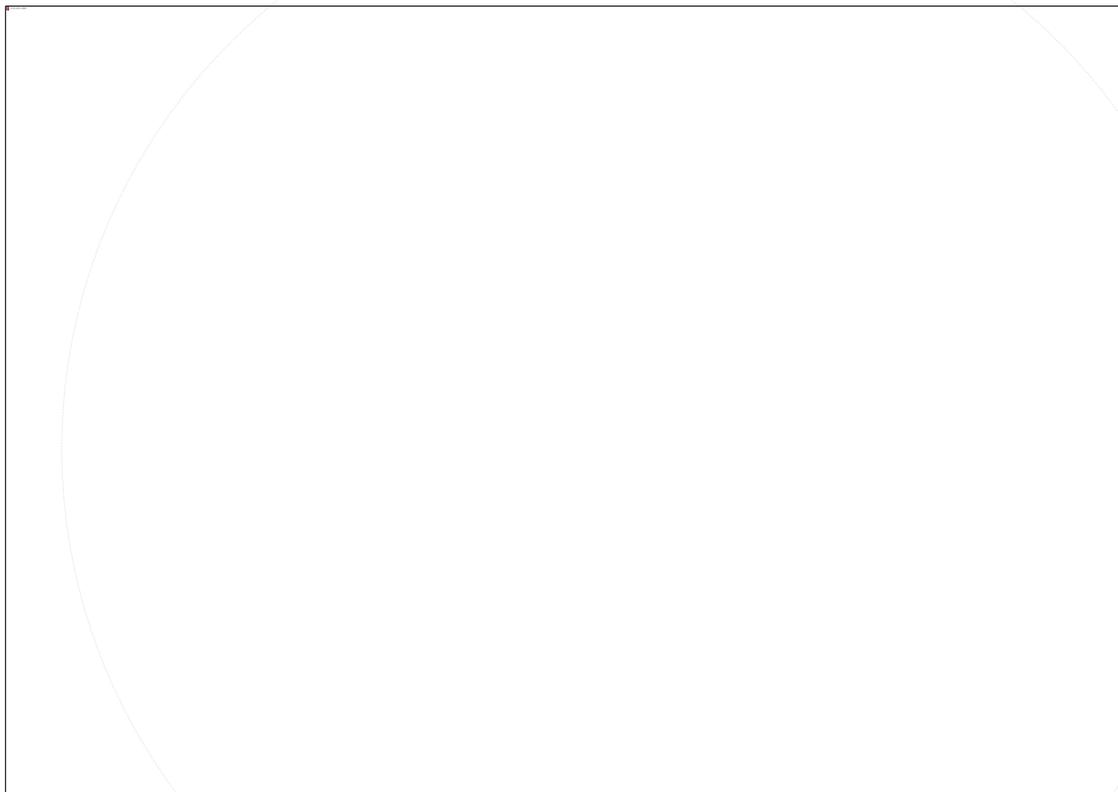
必然原理只適用於每個次群體（每個起始體重分組）彼此間相對比例不改變的狀況。

羅德案件：「處理」（性別）對每個體重分組的學生人數百分比影響極大。

- > 無法使用必然原理

## 以圖說明辛普森悖論：食堂伙食 V S . 體重

Paradox Galore!



●  
數學式： $Y = W_f - W_i$

第一位統計學家：

比較男女的體重增加幅度差異。

-> 合併後的觀察資料提供正確答案，也就是沒有影響。

第二位統計學家說法：「整體增加幅度，不就是各組增加幅度的平均值嗎？」

●

## 以圖說明辛普森悖論：食堂伙食 V S . 體重

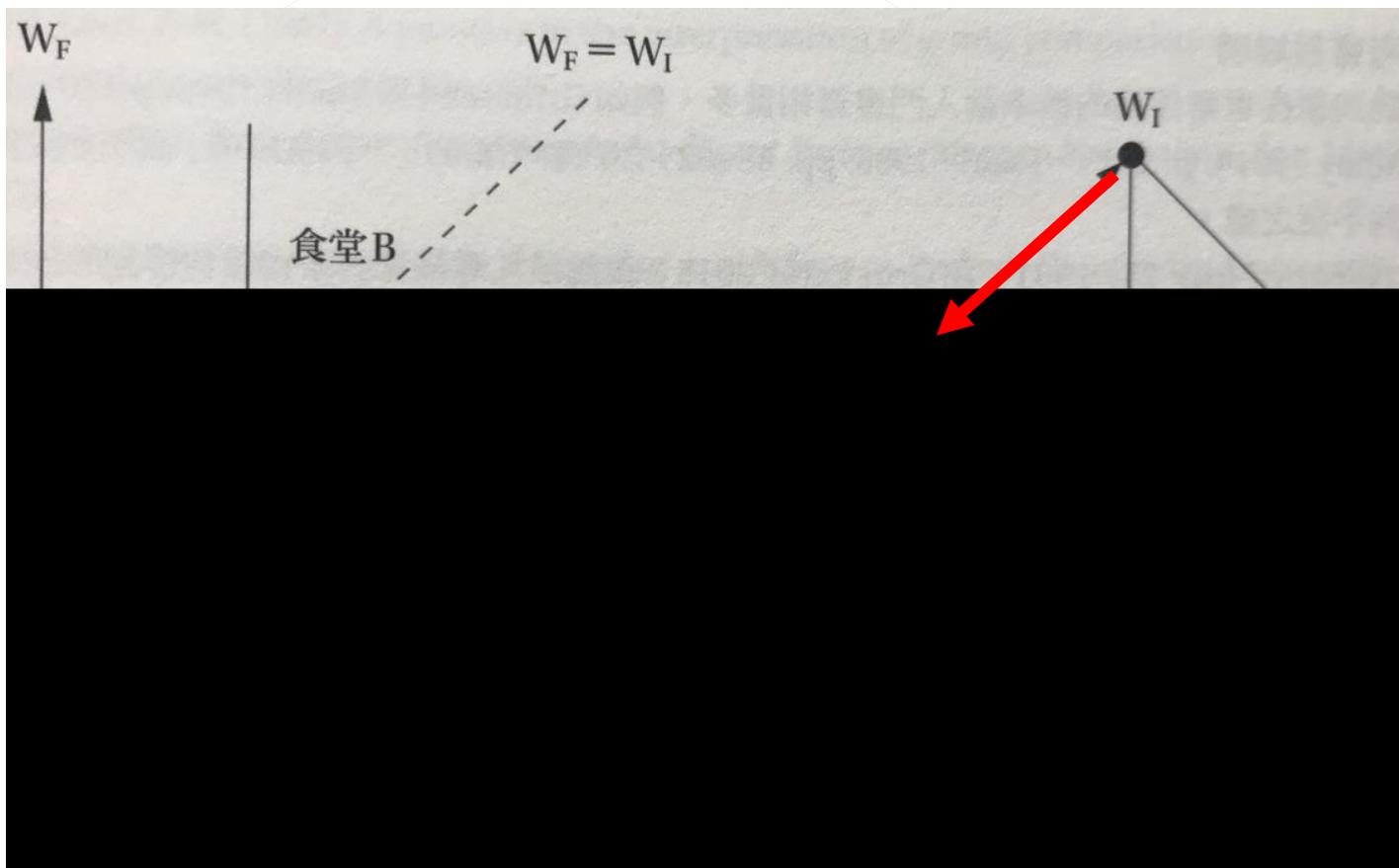
第二位統計學家：「整體增加幅度，不就是各組增加幅度的平均值嗎？」

A n s : 如果分層本身在處理後會改變，則答案為否定。

伙食效果？男女差異？

- > 做出修正

## 魏納和布朗的 羅德悖論修正版



第一位：

依據「圖形對稱」，斷定由伙食A改到伙食B對體重增加幅度沒有影響。

第二位： ( V )

比較依群體中為  $W_0$  的學生採用伙食A和伙食B的最終體重，斷定採用伙食B的學生體重增加較多。

## 結論

羅德悖論的矛盾程度不比辛普森悖論高。

「因果」會讓同組資料有不同結論，甚至是說不通。