

金融衍生品市場

(Financial Derivative Market)

本章首先介紹了數理金融的定義、發展歷史、跨領域的特質與在現代金融上的諸多應用。其次，以實際的數據呈現幾個金融衍生品市場的發展歷程。最後著重於遠期、期貨、交換、選擇權等線性與非線性契約的觀念介紹。

何謂計量財務金融

IAQF 的定義

國際計量財務金融協會 (International Association for quantitative finance – IAQF) 旨在提供平台，藉由討論前沿和關鍵的議題，致力於培養計量財務金融專業。IAQF 由來自銀行，券商，對沖基金，退休基金，資產管理公司，科技公司，監管，會計，諮詢和律師事務所，和世界各地的學者和實務者等組成，是一個不以營利為目的的專業協會。

IAQF 的前身為設立於 1992 年的國際金融工程師協會 (International Association of Financial Engineer - IAFE)。IAQF 中特別針對「金融工程」(financial engineering) 的定義、範疇、出路、應用、以及前景等做了說明，節錄如下。由此，也可以看出計量財務金融的特色。

What is Financial Engineering

Financial engineering is the application of mathematical methods to the solution of problems in finance.

It is also known as financial mathematics, mathematical finance, and computational finance.

Financial engineering draws on tools from applied mathematics, computer science, statistics, and economic theory.

Investment banks, commercial banks, hedge funds, insurance companies, corporate treasuries, and regulatory agencies employ financial engineers.

Quantitative analysis has brought innovation, efficiency and rigor to financial markets and to the investment process.

As the pace of financial innovation accelerates, the need for highly qualified people with specific training in financial engineering continues to grow in all market environments.

從上述可看出，金融工程，金融數學，數理金融，計算金融甚至計量財務金融等，在目前都可以視為是等義的專業領域。

過去二十年來，計量財務金融雖已為人多所聽聞，但它跨學科領域的特質，以及在金融上莫大的影響力不斷地引人入勝，欲窺其堂奧。一般來說，計量財務金融著重以數理方法、資訊科技、財務經濟等三方面綜合性地來解決金融問題。相較於傳統以財務經濟為主的解決方案，更加強調了如何整合，並運用強大的數理方法與資訊科技，因此不難看出計量財務金融專業與一般財務管理專業之迥異。這使得許多具有理工科系的大專院校，在此

領域上有個自然的延伸，並足以解釋過去十年來全球在計量財務金融專業領域上的成立，如雨後春筍般的冒出來，以提供需求龐大的金融機構，源源不絕的高級專業人才。

計量財務金融專業人才一般具有以下的能力：新金融商品的開發與評價、投資組合的建置、風險管理、情境模擬等。因此，不難在一些相關的職場中，找到很具有挑戰性與前瞻性的工作機會。更具體的說，可能工作的單位至少包括了投資銀行 (investment bank)、商業銀行 (commercial bank)、證券公司 (security firm)、對沖基金 (hedge fund)、保險公司 (insurance company)、金融諮詢 (financial consultant)、企業財務 (corporate treasury)，以及監管單位 (regulatory agency) 等。



數理金融的歷史

關於數理金融的歷史發展以及它的影響，或許遠超過大部份人的認知，因此十分值得深入介紹。

法國數學家 Louis Bachelier (1870 -1946) 在1900年所發表的博士論文，標題為 *Theory of Speculation*，（譯：投機理論）記錄了他觀察到在巴黎股市交易所中，股價的改變呈現出一些不規則的現象，這種現象與自然界中所觀察到的「布朗運動」(Brownian motion)

類似。布朗運動是為了紀念在 19 世紀時蘇格蘭的植物學家 Robert Brown，他觀察到當花粉中的微小粒子懸浮在水面上時，粒子的運動會呈現出十分不規則的軌跡。為解釋這些出現在自然界以及金融界的現象，Bachelier 率先提出了布朗運動的數學模型以描述價格的動態行為，並且探討布朗運動的馬可夫性質 (Markov property) 與平賭 (martingale) 等等隨機過程 (stochastic process) 中的重要觀念。

1905年，著名的物理學家 Albert Einstein 推導出了布朗運動所對應的擴散方程式並估計出分子的大小。1923年，美國數學家 Norbert Wiener 以嚴謹的數學方法建構出布朗運動，而為了紀念這樣的貢獻，布朗運動亦稱之為韋納過程 (Wiener process)。1931年，俄國數學家 Andrey Kolmogorov 探討了更一般的擴散並且連續的馬可夫過程，接著在1944年，日本數學家 Kiyoshi Itô 提出了對布朗運動積分的一個定義，即所謂的隨機積分，並且利用 Itô's formula 發展出一套「隨機微積分」 (stochastic calculus) 的計算方式，以便處理一般的隨機微分方程式 (stochastic differential equation)。值得一提的是關於 Itô's formula 的發現，文獻後來指出在二次世界大戰期間的1940年，法國數學家 W. Doeblin 也發展出類似的結果，不過他在戰時不幸過世，所以這個結果沒能及時的公諸於世。

根據以上的基礎，隨機過程的研究便如火如荼的展開。1948年，法國數學家 Paul Levy 推廣了連續過程的布朗運動至有跳躍 (jump) 的 Levy 過程。直至今日，隨機分析已自成一派，並與不同的數學學門、自然科學與工程、社會科學等領域交流，而且在應用層面的接軌上已十分廣泛並持續進行。

然而 Bachelier 的博士論文並沒有停留在機率理論的發展階段，論文中的第二個部份是關於布朗運動在金融上的應用。同樣令人驚艷的是，他在沒有後來發展的隨機微積分的工具下，居然推導出類似於現代金融最重要的理論結果：Black-Scholes 選擇權訂價公式。關於 Bachelier 的生平介紹，可見 [Courtault 等 \(2000\)](#)；而關於 Bachelier 的博士論文原文，其英文翻譯，以及對後來的影響等，請進一步參閱由 Davis and Etheridge (2006) 所合著之“[Louis Bachelier's Theory of Speculation](#)”。請注意該書之副標題“The Origins of Modern Finance”，標示出 Bachelier 的博士論文對現代金融確實有許多原創性的啟發。其中最重要的是影響了，F. Black 與 M. Scholes 在1973年發表了著名的 Black-Scholes 選擇權訂價公式；同年芝加哥選擇權交易所 (Chicago Board of Option Exchange, CBOE) 成立。在1997年 Scholes 與 Merton 共同獲得了[諾貝爾經濟學獎](#)，以表彰他們在選擇權訂價，以及避險理論上開創性的工作；而不幸的是，Black 先生已於1995年逝世，否則他也必然是諾貝爾獎的得主。

作為一個跨足金融、經濟、數學、統計、資訊等領域的學科，計量財務金融持續釋放出活躍的學術能量，且致力於以下幾個金融實務中問題的解決，包括了新產品開發，衍生性金融商品評價，建構投資組合，風險管理，情境模擬，金融體系穩定等議題，[更多相關的問題，可見於此](#)。

金融衍生品市場

從圖 2.1 中的經濟總覽，可以看到以國內生產毛額（GDP）的成長率，作為衡量國家或區域在過去的經濟發展狀況。僅以肉眼觀察，它們增加或減少的情形，彼此間或有相關也或無相關，但注意到在 1970 年初，與 2010 年之前，這些數據都呈現出顯著且全面性的下跌現象。

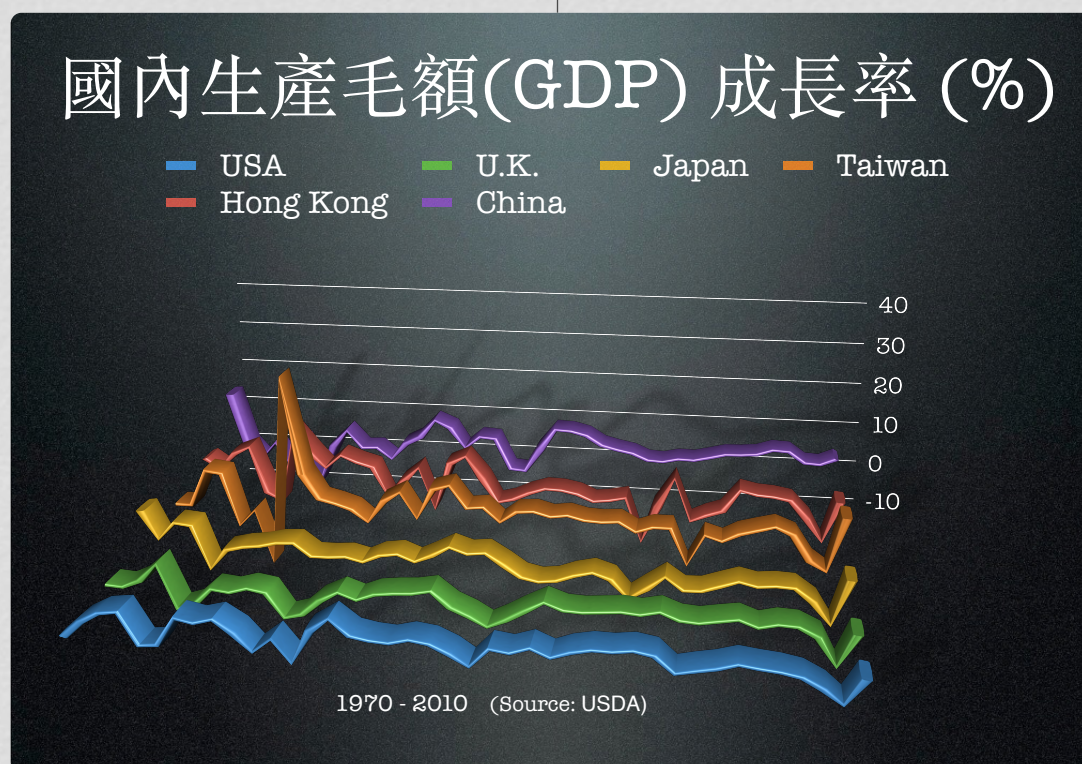
1973 年的石油危機與 2008 年的金融海嘯分別是這兩次經濟衰退的「元凶」。石油是實體的資產，除了作為能源的供給，石油也是工業原料之一。油價的飆漲限制了當時的經濟發展，使得許多人的生活受到了負面影響。而 2008 年的金融危機，更精確地說是信用衍生性市場（credit derivative market）的崩壞，對許多人卻相當抽象。世人甚至不知道衍生性金融市場是什麼？存在在哪裡？也認為似乎不需要用到

這麼複雜的金融商品。但不可否認的是，金融已經成為一種全球化的融資管道，讓許多諸如能源、房貸、國債、保險等等鋪天蓋地的實體風險，透過金融商品，特別是衍生性商品，被不同目的的投資人彼此交換。在金融價格與實體風險互換的過程中，金融市場上的價格就必須要能夠成為實體風險的衡量指標。如果價格無法立即、充分地反應實體資產風險，那麼金融市場上的某些投資人將蒙受極大的損失，至終金融危機的再現將是不可避免的。

在過去的 40 年間，金融不斷的快速進展，其中包括了金融商品的創新，交易的資訊化與透明化，以及風險管理的意識增加等等，形成了越來越多的新金融市場。金融機構如銀行、券商、投資公司、保險公司等則是重要的市場參與者。要全面性的介紹金融市場

的全貌，以及金融機構的操作並非本書的目的。反之，本書著眼于這些巨大架構下的基礎元素－金融衍生性商品（financial derivatives）的理論、操作、以及一些重要的發展。實然，缺乏

圖 2:1 經濟總覽



了對這些基礎工具的了解與掌握，新金融市場的發展無異于泡沫。

交易所與店頭市場

顧名思義，金融衍生品 (financial derivatives) 是一類金融契約，它的價格倚賴於某些標的變數 (underlying variable)，或者等義的說，金融衍生品是由某些標的變數所衍生出來的金融商品。這些變數通常是風險性標的資產 (risky underlying asset) 價格，例如股票、大盤指數、利率、匯率，但也可以是氣溫、降雨量、電影票房、波動率等變數。股票或指數選擇權倚賴某檔股票或是某個指數。金融衍生品可以在交易所 (exchange market) 或是店頭市場 (Over The Counter - OTC market) 交易。交易的範圍主要包括了匯率 (foreign exchange - FX)、利率 (interest rate)、信用 (credit)、權益 (equity)、原物料 (commodity) 等五大市場。

對交易所來說，為了確保交易可以順利進行，造市者 (market maker) 必須持續提供標準化商品的買價或是賣價給交易對手，以維持市場的流動性。金融市場裡的會員機構如銀行、券商、或是期貨商等都經常是市場上的造市者，而它們也享有交易稅率的減免，以及市場資訊的優先使用權等優惠，以增加它們成為造市者的誘因。

成立於 1848 年的芝加哥商品交易所 (Chicago Board of Trade, CBOT)，早期設定了一種 to-arrive 契約，將農畜類產品規格化，以供農夫與盤商集中交易，作為雙方的避險用途。它後

來演變為一種期貨契約，許多投機客對交易期貨商品本身的興趣更大於對標的農產品的興趣，因此大幅增加了該期貨的交易量。成立於 1973 年美國的芝加哥選擇權交易所 (Chicago Board Options Exchange - CBOE) 是金融市場發展另外一個重要的里程碑。從起初只交易 16 檔股票的買權 (call option)，到現在上千種包括股票、指數、期貨、ETF 等林林總總的選擇權，CBOE 無異是世界上金融衍生品市場的領航者。

交易所會對標的商品的質量與數量進行標準化，並規範投資人在集中市場的交易行為，以在增加流動性的同時可降低交易雙方的信用風險。在電子交易頻繁的現代，吸引了全球的投資人可以安全、有效率的參與市場，以交換風險。

所有發生在交易所以外的衍生品交易都歸入為店頭 OTC 市場。相對於交易所嚴格規範的商品契約，OTC 市場提供了更大彈性的交易空間。事實上，金融衍生品交易的最大市場是店頭 OTC 市場。金融機構、基金經理人、或是企業的財務人員通常會針對一些特殊的風險，如利率、外匯、信用等標的資產，或者是一些特殊報酬形式的選擇權等，彼此間進行一對一的協商交易。

現代金融市場

接下來，我們簡介並觀察幾個重要的金融衍生品市場，歷年來的發展概況。

圖 2:2 美國芝加哥選擇權交易所 (CBOE) 歷年的交易量



圖 2.2 中呈現了美國芝加哥選擇權交易所 (CBOE) 歷年的交易量資料。注意到西元 2000 年之前的交易量，是將每 10 年的總交易量置入作為比較。CBOE 從 1973 年設立以來，可以明顯地看出在 2008 年金融海嘯前，選擇權交易量有良好的成長動

能。在歷經近幾年的改革與創新後，交易量又慢慢的恢復。注意到從線性契約如期貨到非線性契約如選擇權，若以 1848 年成立的 CBOT 與 1973 年成立的 CBOE 作為兩個標竿，這段發展足足花費了一又四分之一個世紀。

圖 2.3 中呈現了台灣期貨交易所 (Taiwan Futures Exchange - TAIFEX) 歷年的交易量資料。台灣期交所從 1996 年設立以來，成交量亦不斷地增加，而台指期貨與台指選擇權是主要的交易商品。

圖 2:3 台灣的金融衍生品市場歷年的交易量

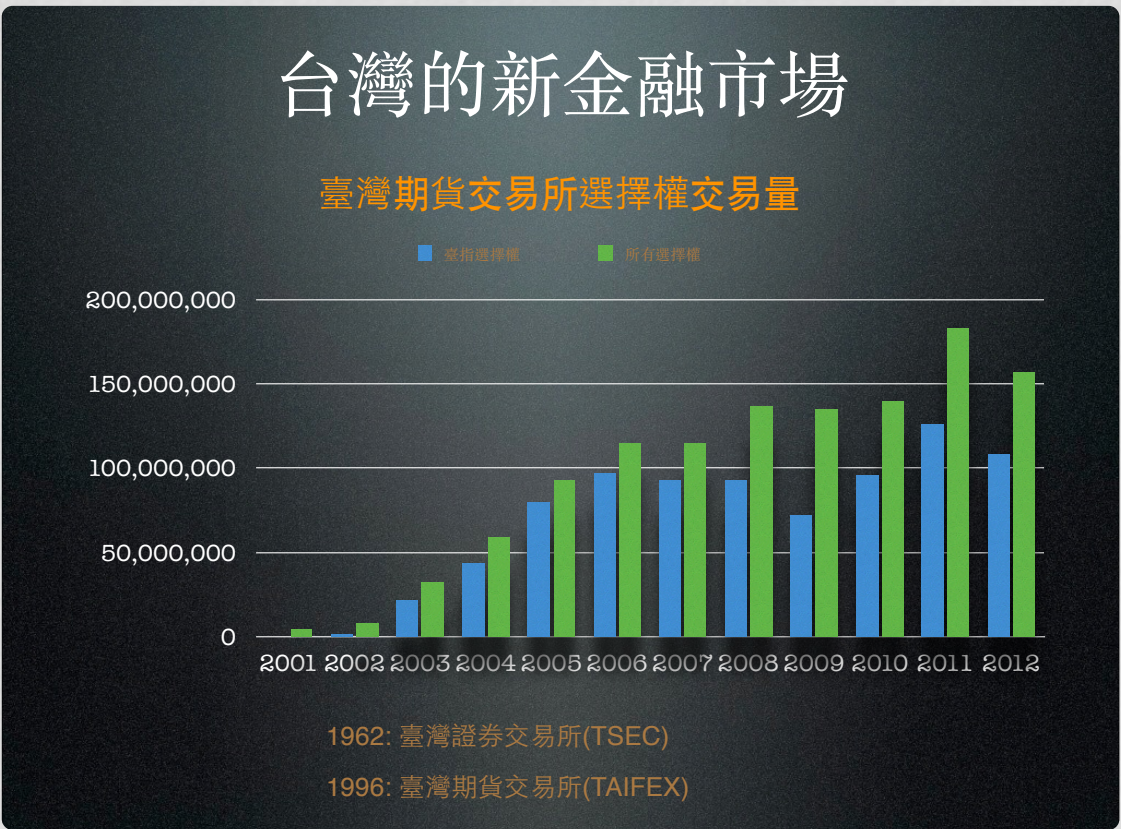
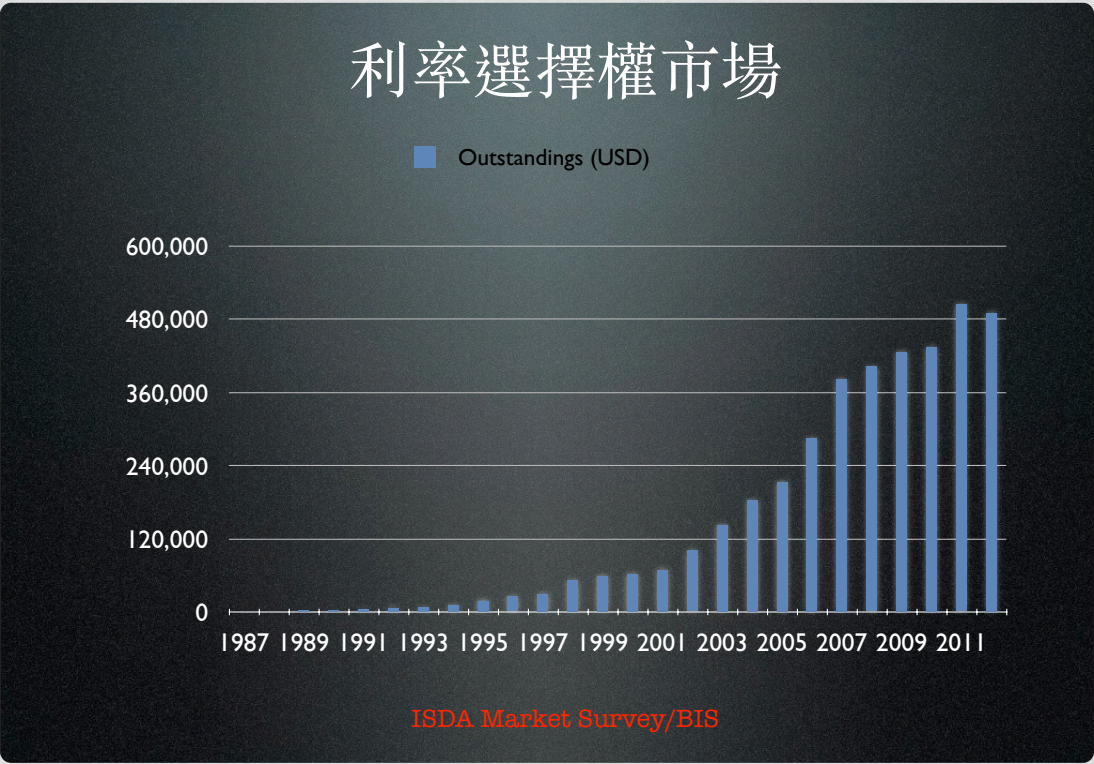


圖 2.4 中呈現了一個 OTC 市場 – 利率衍生品市場，它包括了債券市場、債券選擇權市場等，是所有 OTC 市場中最大的，也是佔所有選擇權市場中交易量之冠。

圖 2:4 利率選擇權市場歷年交易資料



自 1990 年代末期，信用衍生品（credit derivatives）市場發展迅速。因為投資機構可以加入此類的信用衍生品到投資組合中，達成對信用（也就是違約）的積極性風險控管。然而並非金

融市場的經營都是成功的，圖 2.5 中呈現了其中一個新興市場 – 擔保債務憑證 (collateralized debt obligation - CDO) 的隕落，至少是暫時性的隕落。

CDO 通常將一籃子可違約債券的投資組合，按著違約機率加以區隔成「分券」（tranche）後，以交換的形式販售到金融

圖 2:5 CDO 市場歷年交易資料



市場，是一類相當複雜的金融衍生品。肇因於 2007 年美國次級房貸（subprime）的信用危機，CDO 的價差瞬間高漲（意即風險急速上昇）。此外，嚴重的流動性不足，迫使持有這些「有毒資產」（toxic asset）的金融機構對現金的需求大增，以抵禦可能面臨的違約損失。後於 2008 年終因現金不足，許多金融機構或而被併購、倒閉、或而尋求政府的紓困以渡過難關。尤有甚者，因金融衍生品如 CDO 者的交易是全球性的，至終引爆了全球性的金融危機，重挫往後數年全球的經濟發展。

圖 2:6 CDS 市場歷年交易資料

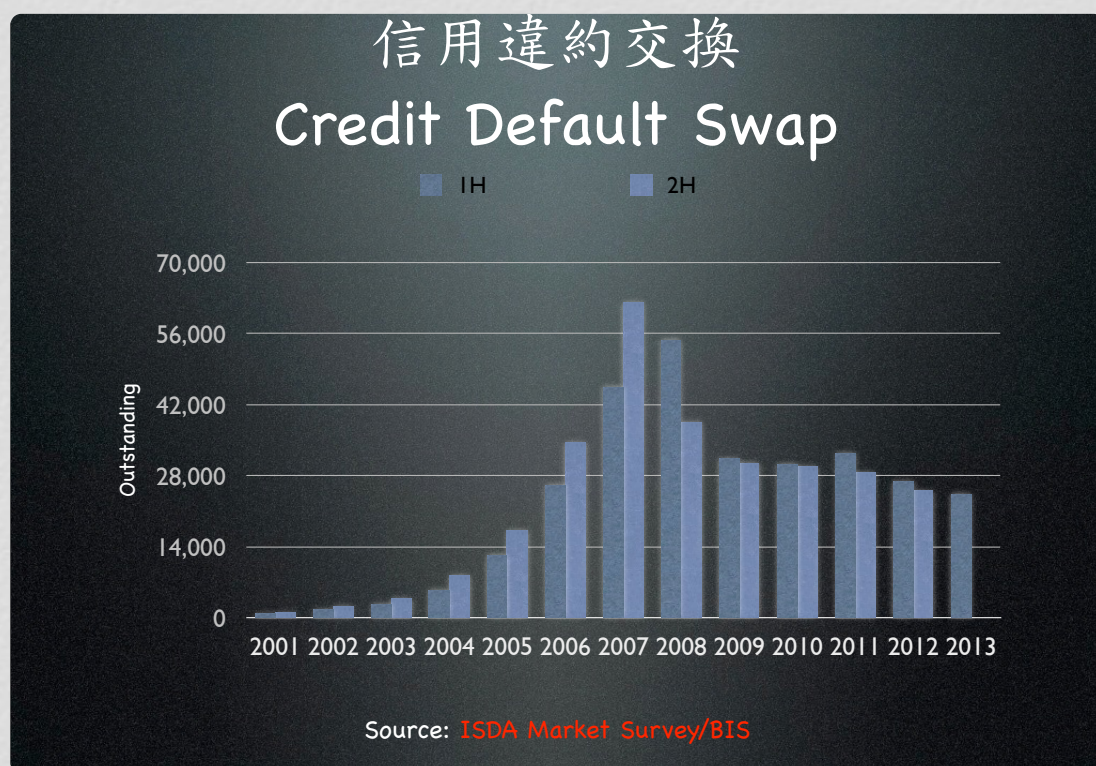


圖 2.6 中呈現了同為信用衍生品的信用違約交換 (credit default swap - CDS) 的市場發展情形，相較於 CDO（按：多個維度），CDS 是一類相當簡化的（按：一個維度）金融衍生品。可以從它的發展中觀察到金融市場仍然渴求對信用風險的積極性控管方式，信用衍生品的未來依然可期。

有用連結

[國際清算銀行 \(Bank for International Settlements, BIS\)](#)

國際清算銀行（BIS）的使命是服務各國中央銀行制定貨幣政策和金融穩定，並促進國際合作，作為中央銀行之間的銀行。

[芝加哥選擇權交易所 \(CBOE\)](#)

全球最早、最大的選擇權交易所，在產品創新、選擇權教育及成交量中的領航者。

[CBOE TV](#) 由全美最大的選擇權交易所，提供選擇權市場新聞，評論，與策略。

遠期、期貨與交換 (Forward, Futures and Swap)

本節介紹金融衍生品中主要的線性契約：遠期與期貨，而交換可視為由數個不同到期的遠期所組合而成的契約。

遠期 (Forward)

遠期契約 (forward contract) 規範了交易雙方，在事前不須支付交易費用的情形下，可以用一個先約定的價格 K ，在未來某一個時間點 T ，來買或賣某個標的資產 (underlying asset)，記做 S 。舉例來說，假設現在的時間為 $t (> 0)$ ，買賣雙方同意簽訂一紙遠期契約。這意味著買方現在同意以某個固定的價格 K ，使得他（她）得以在未來的時間 $T (> t)$ ，用現金 K 跟賣方所提供的標的資產互換。實際上，互換的執行可以是實物交割或是現金交割。T-遠期價格 (T-forward price)，記做 $For_S(t, T)$ ，定義為某一個履約價 K ，它使得該遠期契約在起始時間 t 的價值為 0。

在遠期市場中，資產可以是貨幣 (currency) 如美元，權益證券 (equity securities) 如股票，或是商品市場 (commodity) 如

咖啡等。金融機構與企業財務在店頭市場所從事的外匯 (foreign exchange) 交易中，遠期契約佔有很大的交易量。

遠期是最簡單的衍生品契約之一。在遠期契約到期日 T 的當下，契約持有人必須依約，將遠期價格 K 與風險性資產價格，記做 S_T ，互換。對遠期的買方來說，投資人有義務用 K 來購買 S_T 。由於風險性資產的價格 S_T 會界於 0 到無限大，因此買方的報酬函數可記做 $h(x) = x - K$ ， $0 < x < \infty$ ，變數 x 代表 S_T 。當期末標的物的價格 $S_T = x$ 若是變的足夠貴，遠期的買方就賺取了 $x - K$ ；否則就獲得了是負值的 $x - K$ ，也就是損失了 $K - x$ 。相對的，對遠期的賣方來說，契約的報酬函數是 $h(x) = K - x$ 。不論對買方或是賣方而言，遠期契約的報酬函數皆是線性的，見下圖。

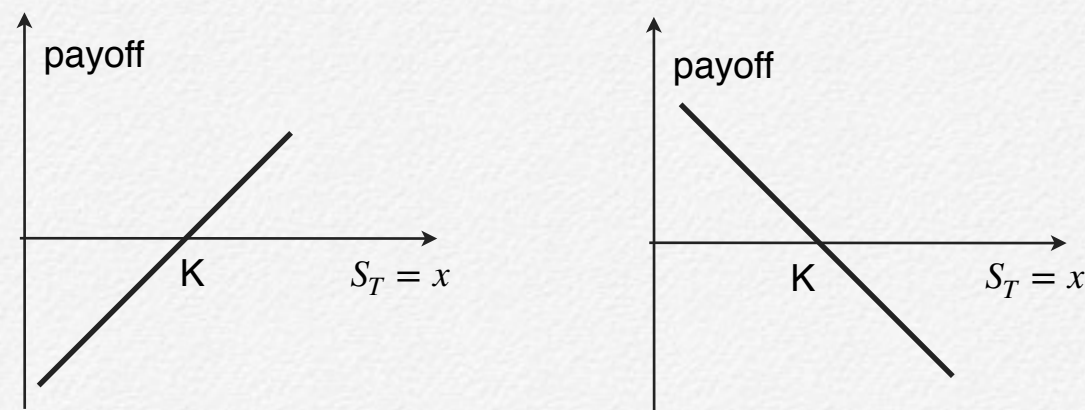


圖 3-1：遠期買（賣）方的線性報酬函數如左（右）

這種針對標的資產未來價格的線性互換契約，吾人可以理解為將浮動的價格風險，通稱為市場風險（market risk），以固定的遠期價格作為互換的一種市場交易機制。其中最重要的假設是交易的雙方不存在違約風險，或通稱為信用風險（credit risk）。因此遠期通常在 OTC 店頭市場中存在，由彼此認識的交易雙方，或藉由金融機構作為中介達成交易的協議。

無套利評價法 (No-Arbitrage Evaluation)

以下介紹如何利用「無套利評價法」(no-arbitrage evaluation) 來決定遠期契約的價值 $For_S(t, T)$ ，也就是履約價 K 的值。

無套利評價方法假設金融市場是有效率的，並不存在「套利」(arbitrage) 或稱作「免費午餐」(free lunch) 的機會。也就是說，不允許任一交易策略，在期初成本為 0 的情況下，其投資組合在往後任何時間的總價值，會是一個正數。比較嚴謹的說，套利意指一期初成本為 0 的投資組合，在往後的某個時間，該投資組合的總價值會是一個正數。此外，本節也假設無摩擦 (frictionless) 的市場條件：資產 S 不支付股利 (dividend)，無交易手續費 (transaction fee)，無交易稅賦 (tax)，可放空交易 (short selling)，可連續交易，可買或賣任何單位的標的資產等，除非另外說明。放空交易指投資人可以用預借的方式賣出資產，以後再買進還回。

在此基礎上，假設 S_t 表示在 t 時的標的資產（如股票、黃金、利率、匯率等）價格，遠期契約的到期日為 T ，以連續複利計算的無風險年利率為 r （存放款利率假設相同），則該遠期契約的價值為

$$For_S(t, T) = S_t e^{r(T-t)}。$$

無套利評價法的證明如下。

- (1) 若市場上遠期契約的報價 $For_S(t, T)$ 大於 $S_t e^{r(T-t)}$ ，則在期初 t 時，可用交易的方式來建構以下的投資組合 (portfolio)：賣出一遠期契約，並買入一標的資產 S_t ，此投資組合在到期日 T 的總價值是 $For_S(t, T) - S_t e^{r(T-t)}$ 。

這是因為遠期契約在到期時，賣方會收到由買方給付的現金 $For_S(t, T)$ ，同時賣方必須交付給買方標的資產；而該資產則是藉由在期初 t ，用向銀行借款的金額 S_t ，所買入的標的資產（價格恰好是 S_t ）。不過，在這段期間，賣方積欠銀行的本利和是 $S_t e^{r(T-t)}$ 。因此在到期時，此交易策略的淨值是 $For_S(t, T) - S_t e^{r(T-t)}$ ；而根據原來假設「遠期契約的報價 $For_S(t, T)$ 大於 $S_t e^{r(T-t)}$ 」，策略淨值必為正，所以「套利」(arbitrage) 存在，與無套利的假設矛盾。

- (2) 若市場上遠期契約的報價 $For_S(t, T)$ 小於 $S_t e^{r(T-t)}$ ，則在期初 t 時，可用交易的方式來建構一反相的投資組合 (portfolio)：買入一遠期契約，並放空一標的資產 S_t 。此投資組合在到期

日 T 的總價值是 $-For_S(t, T) + S_t e^{r(T-t)}$ 。根據原來的假設「遠期契約的報價 $For_S(t, T)$ 小於 $S_t e^{r(T-t)}$ 」，此值為正，因而存在「套利」(arbitrage)，與無套利的假設矛盾。

在無套利的假設之下，遠期契約的價值為 $For_S(t, T) = S_t e^{r(T-t)}$ 。■

在往後第五章 Black-Scholes 訂價理論一章中，我們會學習使用另一種較廣義的「風險中立評價法」(risk-neutral evaluation) 來推論出遠期契約的價值；以及由價值函數 (value function) 所滿足的偏微分方程式 (partial differential equation) 求解，也可推得遠期價值的公式。

期貨 (Futures)

遠期契約提供了買賣雙方以「線性」的方式互換市場風險，通常存在於 OTC 市場。此類契約的立意雖好，但無法規避買賣雙方在履約前潛在的信用風險 (credit risk)。金融市場很迅速地發展出在集中交易所 (exchange) 中，除了嚴格限定參與市場的會員投資機構，並且用「保證金」機制 (margin mechanism)，以每日結算的方式來減少信用風險，而這種遠期契約就稱之為期貨。在往後的第五章中，將會利用「風險中立評價法」證明當無風險利率是常數時，遠期與期貨的價值是一樣的，以及其它相關如偏微分方程的結果。

期貨契約的內容，載明了買賣雙方約定了在未來的某一個時點，以約定的價格和數量，買進或賣出某項特定商品。為了確保買賣雙方應得履行的義務以及結算，期貨交易所 (futures ex-

change) 因而產生。期貨交易所將每一個期貨契約標準化，使得交易的買賣雙方對同一商品具有相同的競價基礎。標準化契約的要素包含了：

1. 標的物

指明契約中所交易的商品名稱。例如外匯 (foreign exchange) 市場中的美元指數期貨合約、原物料 (commodity) 市場中的黃豆期貨合約、或是權益型 (equity) 市場以臺灣加權股價指數為標的的台灣加權指數期貨。標的物也稱作「現貨」。

2. 數量

以「口」(contract) 作為基本的交易單位，一口契約定義了標的物的數量多寡。例如在紐約期貨交易所 (NYBOT) 中，一口美元指數期貨的契約規格是美元指數乘上 1000 美元；芝加哥商品交易所 (CME) 中，一口黃豆期貨的契約規格是 5,000 蒲式耳 (bushel)；臺灣期貨交易所 (TAIFEX) 中，一口臺灣股價指數期貨的契約規格是台灣加權指數乘上新台幣 200 元。

3. 交割月份

指明期貨契約的到期月份。期貨契約的存續期間通常較為短期，以月為單位。例如美元指數期貨的交割月份是每年的 3、6、9、12 等四個季月；黃豆期貨的交割月份是每年的 1、3、5、7、8、9、11 等月份；台灣加權指數期貨的交割月份是當月起連續二個月份，另加上 3、6、9、12 月中三個接續季月，總共五個月份。

4.交割方式

可分成實體交割與現金交割二種。實體交割主要用於大宗物資期貨合約，即是「銀貨兩訖」的買方交錢，賣方交貨。不過許多的期貨契約的標的物並無實體可供交割，例如對指數期貨或指數股票型基金（Exchange Traded Funds, ETF）期貨來說，契約到期時甚難逐一交割成分股票，因而改採現金結算的方式來進行交割。

標準化契約的其它要素還包括了最小跳動值，本地交易時間，是否有電子交易等細節，在此則不另做討論。

一般來說，期貨市場具有以下功能

1. 避 險 的 功 能

提供標的物商品的持有者，可以轉嫁因價格變動而產生的風險，這是期貨契約形成的原始動機。

2. 投 機 的 功 能

提供承擔市場風險的能力，和交易對手互換風險，可活絡市場。

3. 價 格 發 現

由於期貨價格、交易量等市場訊息，及時地被揭露出來，投資人可由此判斷，隱含於價格的未來風險資訊內涵。

交換（Swap）

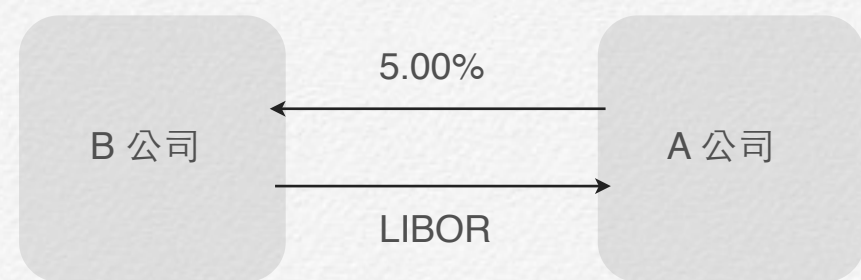
交換契約是衍生性金融商品的一種，交易雙方約定在未來某一些時間點上，彼此互換某些標的資產，也可以用現金結算的方式進行交割。交換契約可以想成數個遠期契約的組合，其共同的標的資產可以是貨幣（匯率）、利率、商品、以及權益等商品。最大的交換契約市場當屬利率交換（Interest Rate Swap, IRS），根據國際清算銀行（Bank of International Settlement, BIS）截至 2013 年中的統計，IRS 的名目金額達到 426 兆美元之譜。

利率交換定義為買賣雙方在一約定的期限內，彼此交換所得到的收款利息（資產）或是貸款利息（負債）。譬如 A、B 雙方簽訂一個 3 年期交換契約，每半年支付一次。A 方同意以每年 5% 的固定利率，支付利息給 B 方；且 B 方同意按照六月期 LIBOR 利率加上 50 個 bp 的浮動利率，支付相同名目本金的利息給 A 方。LIBOR 是倫敦同業拆款利率（London Interbank Offered Rate），許多利率交換契約會以 LIBOR 利率作為協議中的浮動利率。一個 bp（basis point）在金融中定義為萬分之一，即 0.01%。

範例 3.1：3年期交換合約

假設 A 公司與 B 公司於 2007 年 3 月 5 日簽訂一交換合約，A 公司同意以每年 5% 之利率支付 1 億美元名目本金之利息予 B 公司，且 B 公司亦同意按 6 個月期 LIBOR 利率支付相同名目本金

之利息予 A 公司。此合約要求雙方每 6 個月進行一次現金之交換。此交換合約內容如下圖所示：



第一次現金互換發生於合約簽訂後之第 6 個月，亦即 A 公司將於 2007 年 9 月 5 日那天支付 250 萬美元給 B 公司，此金額為 1 億美元本金於此 6 個月期間，年利率 5% 下之利息；而 B 公司亦會於是日將一筆 1 億美元本金之利息支付予 A 公司，且所適用之利率為 6 個月前之 6 個月期 LIBOR 利率。

假設 2007 年 3 月 5 日時之 6 個月期 LIBOR 為 4.2%，則 B 公司須支付予 A 公司一筆 210 萬美元 ($0.5 \times 0.042 \times \$1\text{億} = \$210\text{萬}$) 之現金。

第二次現金互換將發生於 2008 年 3 月 5 日，此時距離當初簽約已一年。A 公司仍支付 250 萬元美金予 B 公司，而 B 公司則按 6 個月前(即 2007 年 9 月 5 日)之 6 個月期 LIBOR 利率(假設為 4.8%)支付予 A 公司一筆本金為 1 億元美金之利息。亦即於 2008 年 3 月 5 日，B 公司須支付 240 萬美元 ($0.5 \times 0.048 \times \$1\text{億} = \$240\text{萬}$) 之金額予 A 公司。

此範例之交換合約共計有 6 次現金互換，固定現金的部分即為 \$250 萬，而支付日的浮動現金則按 6 個月前之 6 個月期 LIBOR

利率計算。下表假設給定一組特定之 LIBOR 利率，並以 A 公司視角，列舉相關現金支付情形：

日期	6個月期 LIBOR 利率(%)	浮動現金流量之收受(百萬)	固定現金流量之支出(百萬)	淨現金流量(百萬)
2007/3/5	4.2			
2007/9/5	4.8	+2.10	-2.50	-0.4
2008/3/5	5.3	+2.40	-2.50	-0.1
2008/9/5	5.5	+2.65	-2.50	+0.15
2009/3/5	5.6	+2.75	-2.50	+0.25
2009/9/5	5.9	+2.80	-2.50	+0.30
2010/3/5		+2.95	-2.50	+0.45

如何決定利率交換中的固定利率，以及更加複雜的交換選擇權 (swaption)，這些屬於訂價方面的課題。利率交換不僅是投資避險的工具，也是市場衡量風險的指標。對於標的物是利率（或債券）的利率交換而言，其固定利率與相同期限之政府公債殖利率的利差 (Swap Spread)，在市場上被用來衡量信用風險溢酬 (Credit Spread)，以估計標的資產的違約機率。

範例 3.2：利用交換合約轉換負債

A 公司可利用交換合約將一筆浮動利率貸款轉換成一筆固定利率貸款。現假設 A 公司有一筆 1 億美元貸款，利率為 LIBOR 加上

10 個基本點（1個基本點為 1% 的百分之一，此處即指 LIBOR+0.1%）。在 A 公司於取得交換合約後，將產生現金流量如下：

1. 公司支付 LIBOR+0.1% 予其債權人
2. 公司依照合約條件收取 LIBOR
3. 公司按照合約條件支付 5%

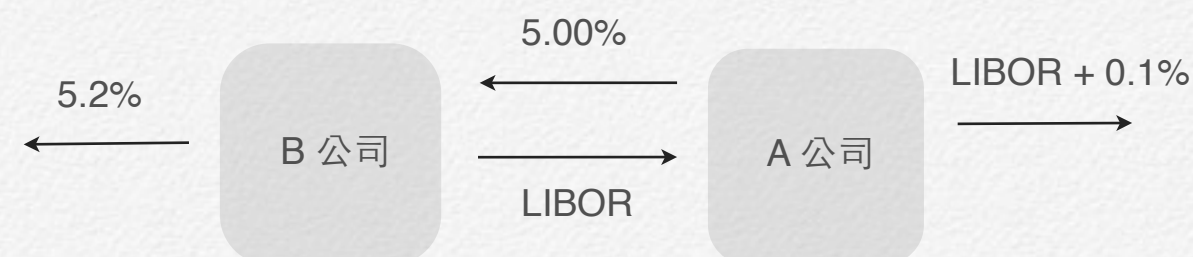
上述現金流量之淨結果為 5.1% 之利率支出。亦即，A 公司將 LIBOR+0.1% 之浮動利率貸款轉變為 5.1% 之固定利率貸款。

同理，B 公司亦可利用交換合約將一筆固定利率貸款轉換成一筆浮動利率貸款。現假設 B 公司有一筆 3 年期，本金為 1 億美元之貸款，利率為 5.2%，在 B 公司於取得交換合約後，將產生現金流量如下：

1. 公司支付 5.2% 予其債權人
2. 公司依照合約條件支付 LIBOR
3. 公司按照合約條件收取 5%

上述現金流量之淨結果為 LIBOR+0.2% 之利率支出。亦即，B 公司將 5.2% 之固定利率貸款轉變為 LIBOR+0.2% 之浮動利率貸款。

此交換合約內容如下圖所示：



選擇權 (Option)

選擇權是一紙契約預先規範了受益的形式，使得契約持有人有權利，但非義務，在某日得以履行約定並支取所實現的報酬。舉例來說，歐式買權 (European call option) 契約規範了買方有權利，但非義務，可以在某固定的到期日 (maturity, expiration date) T ，以一個預先決定好了的履約價格 K ，來購買一單位的標的資產。假若 S_T 代表標的資產在到期日的價格，則歐式買權在到期日的價值，亦稱之為報酬 (payoff)，就是 $h(S_T) = (S_T - K)^+$ ，其中買權的報酬函數定義為 $h(x) = (x - K)^+ = \max(x - K, 0)$ ，見圖 4-1 中的右圖。這是由於契約持有人被允許在到期日以較低的履約價 K ，來交換較高價的資產 S_T 。若投資人立刻在市場上賣出該資產，可獲得 $S_T - K$ 的利潤。當 S_T 不大於 K 時，契約持有人沒有義務要履約並承擔損失，因此下方（或損失）風險得以控制且報酬為 0。

歐式賣權 (European put option) 與買權相仿，它規範了契約持有人有權利，但非義務，可以在某固定的到期日 T ，以一個預先決定好了的履約價格 K ，來賣出一單位的標的資產。從數學上來看，如圖 4-1 中的左圖所示，歐式賣權所規範的報酬函數

是 $h(x) = (K - x)^+ = \max(x - K, 0)$ 。歐式賣權的報酬為 $h(S_T) = (K - S_T)^+$ 。



賣權報酬(put payoff) 函數

買權報酬(call payoff) 函數

圖4-1: 賣權及買權報酬函數

從上圖看來，選擇權契約的買方似乎占盡了便宜，因他或她的期末報酬總是非負的。這個特質區隔出跟前一小節中，所介紹的遠期契約，它是一類線性契約，期末的報酬可能是正的（賺錢），也可能是負的（賠錢）。因此，選擇權契約是有價的。也就是說選擇權契約的買方，在交易期初必須支付代價；而遠期契約的買賣雙方在交易期初並無現金流動。

一般而言，歐式選擇權的定義，規範了標的資產 S 在到期日 T 的報酬 $h(S_T)$ ，其中報酬函數 $h(x)$ 是非負的。對買權來說， $h(x) = (x - K)^+$ ；對賣權來說， $h(x) = (K - x)^+$ 。歐式選擇權是一種「路徑獨立」(path-independent) 的契約，這是由於它的報酬 $h(S_T)$ 僅是標的資產在到期日的價格 S_T 的函數。期貨 (futures) 或是遠期契約 (forward contract) 都可以視為歐式選

擇權的特例，它們的報酬函數皆與最簡單的線性函數 $h(x) = x$ 有關，並且都是路徑獨立型的契約。

若是契約報酬與到期日前的資產價格有關，則稱為「路徑相依」(path-dependent) 的選擇權，例如美式選擇權 (American option)，亞式選擇權 (Asian option)，以及許多其它被統稱為新奇選擇權 (exotic option) 的契約，如障礙選擇權 (barrier option) 等。選擇權契約的價格也稱做權利金或貼水 (premium)。本書第五章會有深入的介紹。這些金融契約除了內容的形式非常具有彈性之外，「客製化」(taylor made) 的金融商品設計，使得金融機構可以提供多樣性的服務，讓消費者的金融風險，例如高科技或石化產業的匯率風險，得以轉嫁出去。

簡介完衍生性金融商品市場之後，吾人不禁要問下面兩個問題：

- (1) 選擇權契約的買方應該支付多少錢，這屬於「訂價」問題 (pricing problem)。
- (2) 選擇權契約的賣方在取得了權利金之後，要如何支付未來可能的報酬呢？這屬於「避險」問題 (hedging problem)。

上述兩個問題的解答都會涉及先前討論之「套利」(arbitrage) 的觀念，我們將會在第五章「Black-Scholes 訂價理論」中深入討論。以下我們介紹歐式選擇權中的「買賣權價平」關係，並以套利的觀念推導這個重要結果。

買賣權價平 (call-put parity)

以 S_t ， C_t 與 P_t 分別表示在 t 時的現貨（如股價），其歐式買權與賣權的價格。在此假設它們的到期日 T 與履約價 K 均為相同，並且資產 S 不支付股利，無風險利率為 r 。買賣權的價平關係如下

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}。$$

這個關係的證明可以利用「無套利評價法」推論出來。首先假設 $C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$ ，則在 t 時可形成一個零成本的投資組合 (portfolio) 如下：買一單位的股票與賣權，且賣出一買權，則期初的淨值為 $C_t - P_t - S_t$ 。在金融中，慣用以買 (buy) 或賣 (sell)，分別以長 (long) 或短 (short) 相稱。若該淨值為正，存入銀行帳戶中獲取利息，是由連續複利率 r ，從現在時間 t 直到到期日 T 。相反地，則從銀行借錢一直到 T 。在到期日 T 時，有兩種可能的狀況會發生：

- (1) $S_T > K$ ：從投資組合中可知期末淨值為

$$(C_t - P_t - S_t)e^{r(T-t)} + S_T - (S_T - K) = (C_t - P_t - S_t)e^{r(T-t)} + K > 0$$

這是因為在到期日時，

- (i) 期初淨值累積了本利和 $(C_t - P_t - S_t)e^{r(T-t)}$
- (ii) 賣權的長部位 (long position) 價值為 0
- (iii) 股票的長部位價值為 S_T

(iv) 買權的短部位 (short position) 價值為 $-(S_T - K)$

期末總價值 (i+ii+iii+iv) 則為 $(C_t - P_t - S_t)e^{r(T-t)} + K > 0$

(2) $S_T < K$ ：同理，從投資組合中可知期末淨值為

$$(C_t - P_t - S_t)e^{r(T-t)} + (K - S_T) + S_T = (C_t - P_t - S_t)e^{r(T-t)} + K > 0$$

也就是說，適當的投資組合可以「鎖定」正的報酬而無需任何成本。顯然的，根據「無套利評價法」，一個有效率的金融市場是不會允許套利行為存在。

此外， $C_t - P_t < S_t - Ke^{-r(T-t)}$ 的假設，也可以由存在一套利的交易策略所推翻。由於買賣權價差 $C_t - P_t$ 必有一價值，因此得證

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}。$$

■

在往後的第五章第三節中，我們會使用更深入的訂價理論，證明此買賣權的價平關係。

習題 Exercise

1. **[新金融商品]** 牛（熊）證是認購（認售）權證的變形，簡介他們的定義。
2. **[新金融市場]** 波動率指數的期貨與選擇權（VIX futures and options）是新穎的金融市場，簡介它們發展的概況，以及何種風險在此被交換。可[點選參考 CBOE 的網頁介紹](#)
3. **[遠期訂價]** 若市場上遠期契約的報價 $For_S(t, T)$ 小於 $S_t e^{r(T-t)}$ ，建構一個可套利的交易策略。
4. **[遠期價格]** 若目前一不支付股利的股價是 \$25，無風險年利率是 5%，六個月到期的遠期價值為何？

[遠期價值網路計算器](#)

5. **[遠期訂價]** 若遠期契約的標的物是會給付現金股利的股票，假設年化連續複利的股利率是 q ，使用「無套利評價法」，證明遠期價值 $For_S(t, T) = S_t e^{(r-q)(T-t)}$ 。
6. **[買賣權價平]** 在 $C_t - P_t < S_t - Ke^{-r(T-t)}$ 的市場假設下，建構一個可套利的交易策略。

7. **[買賣權價平]** 若選擇權契約的標的物是會給付現金股利的股票，假設年化連續複利的股利率是 q ，使用「無套利評價法」證明買賣權價平的關係式為

$$C_t - P_t = S_t e^{-q(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}。$$

8. **[買賣權價平]** 若選擇權契約的標的股票恰好在選擇權到期時支付一筆現金股利 D ，使用「無套利評價法」證明買賣權價平的關係式為

$$C_t - P_t = S_t - De^{-r(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}。$$

更多關於 put-call parity 及其應用可見 [putcallparity 網站](#)

9. **[利用交換合約轉換資產]** 交換合約亦可用於將賺取固定利率之資產轉換成賺取浮動利率之資產。假設 A 公司持有 1 億美元之債券，未來 3 年中每年可賺 4.7% 之固定利息。假設 B 公司有一筆 1 億美元之投資，報酬率為 LIBOR-0.2%。根據以下的交換合約內容圖示，寫出 A、B 公司於取得交換合約後，分別產生的現金流量。

