

計量財務金融 金融科技

國立清華大學 計量財務金融學系/數學系
韓傳祥 著



CHAPTER 2 布朗運動

Outline

- 第一節 建構布朗運動
- 第二節 隨機過程
- 第三節 馬可夫性質與平賭
- 第四節 布朗運動的推廣：伊藤過程
- 第五節 隨機積分的金融意義

第一節 建構布朗運動

(歷史) 報酬率分佈

- 2010 年 10 月 22 日到 2011 年 10 月 24 日一年期美國 S&P 500 指數的日資料，畫出當年每日(對數)報酬率分布的直方圖。數據資料是從 Yahoo Finance 網頁下載。
- 複習基本常態變數的性質

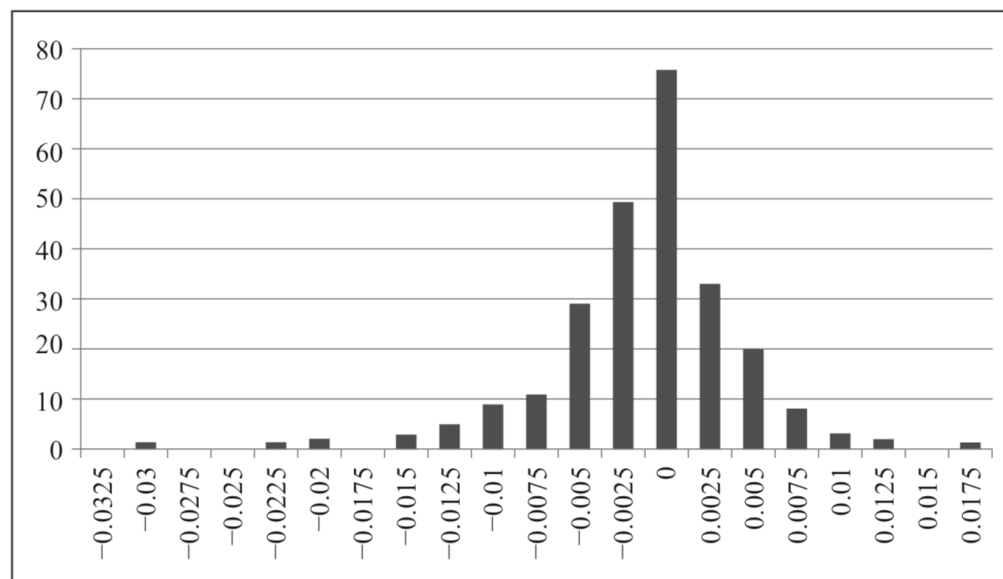


圖 2.1 S&P 500 指數日報酬率的直方圖

報酬率與常態隨機變數

- 令 W_t 是資產 W 從時間 0 到時間 $t \geq 0$ 的累積報酬率。假設 $\Delta t (> 0)$ 代表單位時間，則 $\Delta W_t \equiv W_{t+\Delta t} - W_t$ 代表了 W 在單位時間的報酬率，或稱之為增量 (increment)。
- 假設起始報酬為 $W_0 = 0$ ，在給定一遞增的時刻序列 $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_k = k\Delta t, \dots\}$ ，可以將累積報酬率 W_{t_n} 表達成為一組報酬率 (或增量) 的總和

$$W_{t_n} = W_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta W_{t_k} \dots \dots (1 - 1)$$

- 進一步假設每個報酬率 (或增量) 服從常態分配 $\Delta W_{t_k} \sim N(0, \Delta t)$ 且彼此互為獨立。根據常態分配的基本性質 (可加性) 可得，累加報酬率會服從的分配是 $W_{t_n} \sim N(0, t_n = n\Delta t)$ 。

累積報酬率與布朗運動

- 令時間 t 代表了一個特定的時刻，考慮一序列離散時間 $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_k = k\Delta t, \dots, t_n = t\}$ ，其中 $\Delta t = t/n$ 。當序列長度 n 趨近無限大，使得離散區間的度 Δt 趨近於0，很自然地可將離散時間型的方程式（1-1）推廣到以下的連續時間型方程式：

$$W_t = \int_0^t dW_s, \text{ for } t \geq 0 \dots \dots (1-2)$$

- 極端微小的增量（infinitesimal increment）記為 dW_t ，是由增量 ΔW_t 收斂而來； dW_t 的機率分配記為 $\mathcal{N}(0, dt)$ ，也是由 ΔW_t 的機率分配 $\mathcal{N}(0, \Delta t)$ 收斂而來。
- 由常態分配的可加性，可推論在時間 t 的布朗運動 W_t 所服從的分配是 $\int_0^t dW_s \sim \mathcal{N}(0, t)$ 。

模擬分析

- 離散時間型方程式 (1-1) 可視為，在連續時間下式 (1-2) 布朗運動的一個近似版本。
- 運用電腦產生隨機性的樣本，再根據數理模型來模擬某些現象的發生，這樣的數值運算方法稱為「蒙地卡羅法」(Monte Carlo method)。
- 範例**1.1**：布朗運動的模擬
 - 根據式 (1-1)，我們可以利用電腦程式，來產生布朗運動模擬的軌跡。
第一步： $\Delta W = \text{randn}(1,250) \cdot \sqrt{1/250}$ ；% 以 randn 產生 1×250 個 $\mathcal{N}(0,1)$ 分布的樣本並乘上 $\sqrt{1/250}$ (250 個模擬的日報酬)
第二步： $\Delta W = [0 \ \Delta W]$ ；% 調整 ΔW 從 0 開始
第三步： $\Delta W \leq t \leq 1 = \text{cumsum}(\Delta W, 2)$ ；% 以 cumsum 累加日報酬或增量 ΔW 以形成布朗運動軌跡〔一年內的累積報酬率〕

以隨機漫步建構布朗運動

- 令伯努利隨機變數 X 取值為1或-1且發生的機率各為 $p = 1 - p = 0.5$ 。
- 若起始累積報酬率是 $M_0 = 0$ ，則 k 期後累積報酬率是 $M_k = \sum_{j=1}^k X_j$ ， M_k 被稱為隨機漫步。定義增量為 $M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j$ ，則
 1. 增量 $\{M_{k_{i+1}} - M_{k_i}\}_{i=1}^m$ 是互為獨立的。
 2. 每一個增量 $M_{k_{i+1}} - M_{k_i}$ ，均值為 0，而變異數為 $k_{i+1} - k_i$
- 定義 $W^{(n)}(t_i) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt_i}, nt_i \in \mathbb{Z}^+$ ，新過程 $W^{(n)}$ 是將原來的隨機漫步 M_k ，適當的做了某種時間以及空間上的壓縮，使得新過程的時間區間為 $1/n$ ，振幅為 $1/\sqrt{n}$ 。根據中央極限定理 $W^{(n)}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X \equiv W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$

布朗運動的估算

- 根據上述想法，我們可以透過 $W^{(n)}(t)$ 來逼近布朗運動 W_t ：
- 範例：我們要計算 $P(0 \leq W_{0.25} \leq 0.2)$ 。根據定義 $W^{(100)}(0.25) = \frac{1}{10} M_{25}$ ，因此：

$$\begin{aligned} P(0 \leq W_{0.25} \leq 0.2) &\approx P(0 \leq M_{25} \leq 2) = P(M_{25} = 1) \\ &= \binom{25}{13} \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 0.1555 \end{aligned}$$

- 然而布朗運動在此區間的機率為

$$P(0 \leq W_{0.25} \leq 0.2) = \int_0^{0.2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2z^2} dz \approx 0.1554$$

第二節 隨機過程

隨機過程(1/4)

- 定義 2.1：收集一序列的隨機變數所形成的集合就是隨機過程
 - 例如：前一節提到的 $\{W_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 和 $\{W_t \geq 0\}$ 都是隨機過程。
- 對於隨機變數 X 與 Y ，在給定 Y 的資訊下，對 X 的估計可由「條件期望」 $E[X|Y = y]$ 來刻劃。當條件機率密度函數 $f_{X|Y}(x|y)$ 存在時，

$$E[X|Y = y] = \int x f_{X|Y}(x|y) dx = \int x \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} dx = g(y)$$

- 一般也將條件期望記為 $E[X|Y] = g(Y)$

隨機過程(2/4)

- 定理 2.1 (條件期望的性質)

1. $E[Y|Y] = Y$
2. (positivity) 若 $X \geq 0$, $E[X|Y] \geq 0$
3. (linearity) $E[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 | Y] = \alpha_1 E[X_1 | Y] + \alpha_2 E[X_2 | Y]$
4. (taking out property) $E[Xh(Y)|Y] = h(Y)E[X|Y]$
5. (tower property) $E[E[X|Y]] = E[X]$
6. (independence) 若 $X \perp Y$, $E[X|Y] = E[X]$
7. (conditional Jensen's inequality) 若 $\varphi(x)$ 是凸函數 , 則 $E[\varphi(X)|Y] \geq \varphi(E[X|Y])$

最小平方估計



範例 2.2

$$\text{var} (X - E[X | Y]) \leq \text{var} (X - Y)$$

證明：將右項寫為 $\text{var} ((X - E[X | Y]) + (E[X | Y] - Y))$ ，展開後利用上述定理 2.1 證明

$$\text{cov} (X - E[X | Y], E[X | Y] - Y) = 0。$$

此計算留做習題。

範例 2.3 (最小平方估計)

$$E [(X - E[X | Y])^2] \leq E [(X - Y)^2]$$

證明：觀察到上述範例的結果 $\text{var} (X - E[X | Y]) \leq \text{var} (X - Y)$ 左項中的隨機變數均值为 0，也就是 $E[X - E[X | Y]] = 0$ 。因此左項

$$\text{var} (X - E[X | Y]) = E [(X - E[X | Y])^2]。$$

上述範例不等式中，右項的變異數必然不大於二階動差

$$\text{var} (X - Y) \leq E [(X - Y)^2]，$$

故得證。

條件期望 $E[X | Y]$ 之統計性質及其幾何意義

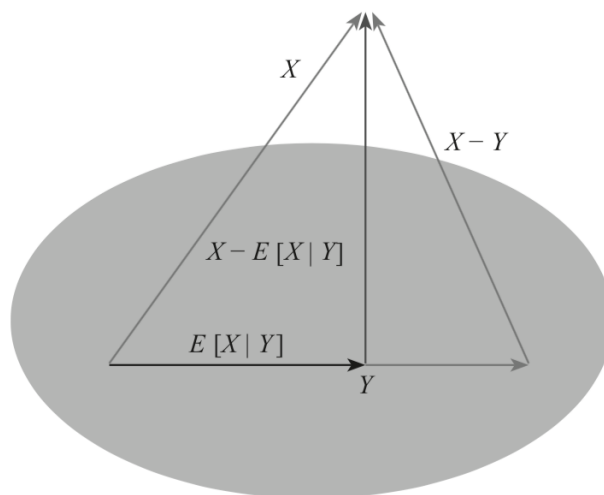


圖 2.1 條件期望 $E[X | Y]$ 的幾何意義。

統計	幾何
被解釋變量	X
解釋變量	Y
可解釋的部分	$E[X Y]$
未能解釋的“獨立”部分	$X - E[X Y]$

隨機過程(3/4)

- 在隨機過程的情形下，可定義出隨機變數 X ，在給定了某些資訊 $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$ 下的條件期望 $E[X|Y_1, Y_2, \dots, Y_k]$ 。
- 每個資訊 Y_i 可以代表在時刻 i 的股價、交易量、財報等綜合信息，這些資訊的搜集 $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \dots\}$ 稱作資訊流(information flow)。

隨機過程(4/4)

- 定理 2.2 (資訊流下條件期望的性質)

1. 對 $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $E[Y_j | Y_1, Y_2, \dots, Y_k] = Y_j$
2. (positivity) 若 $X \geq 0$, $E[X | Y_1, Y_2, \dots, Y_k] \geq 0$
3. (linearity) $E[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 | Y_1, Y_2, \dots, Y_k] = \alpha_1 E[X_1 | Y_1, Y_2, \dots, Y_k] + \alpha_2 E[X_2 | Y_1, Y_2, \dots, Y_k]$
4. (taking out property) $E[X h(Y_j) | Y_1, Y_2, \dots, Y_k] = h(Y_j) E[X | Y_1, Y_2, \dots, Y_k]$
5. (tower property) $E[E[X | Y_1, Y_2, \dots, Y_k]] = E[X]$
6. (independence) 若 $X \perp Y_j, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $E[X | Y_1, Y_2, \dots, Y_k] = E[X]$
7. (conditional Jensen's inequality) 若 $\varphi(x)$ 是凸函數 , 則
 $E[\varphi(X) | Y_1, Y_2, \dots, Y_k] \geq \varphi(E[X | Y_1, Y_2, \dots, Y_k])$

第三節 馬可夫性質與平賭

馬可夫性質 Markov Property (1/2)

- 在估計隨機過程的時候，如果僅需要知道關於這個過程的最新訊息，而不需要知道它過去的訊息，則此隨機過程就稱作具有馬可夫性(Markovian)或馬式性，該過程稱為馬可夫過程(Markovian process)或馬式過程。
- 考慮離散時間下的隨機過程。
- 定義3.1(Markov Property)：在給定了資訊流(information flow) $\{Y_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 下，隨機過程 $\{X_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 稱為馬可夫過程若對時間 $0 \leq t_i \leq t_k$ 以及函數 h ，存在一函數 g 使得
$$E[h(X_{t_k})|Y_{t_0}, Y_{t_1}, \dots, Y_{t_i}] = g(Y_{t_i}) = E[h(X_{t_k})|Y_{t_i}]$$

馬可夫性質Markov Property (2/2)

- 若不特別提及資訊流的形式，則以原隨機過程的歷史訊息取代。在此情形下馬可夫性質的定義如下：

- 定義3.2(Markov Property)：隨機過程 $\{X_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 稱為馬可夫過程若對時間 $0 \leq t_i \leq t_k$ 以及函數 h ，存在一函數 g 使得

$$E[h(X_{t_k})|X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_i}] = g(X_{t_i}) = E[h(X_{t_k})|X_{t_i}]$$

平賭Martingale (1/2)

- 某資產未來的價格預期，若等同於現在最新的價格，也就是該資產價格預期是「持平」，則該過程是公平的，也就是martingale。
- 定義3.3(Martingale)：在給定了資訊流(information flow) $\{Y_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 與隨機過程 $\{X_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 下，對任意時間 $0 \leq t_i \leq t_k$ ，
 1. 若條件期望滿足了 $E[X_{t_k} | Y_{t_0}, Y_{t_1}, \dots, Y_{t_i}] = X_{t_i}$ ，過程 $\{X_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 是一個martingale。
 2. 若條件期望滿足了 $E[X_{t_k} | Y_{t_0}, Y_{t_1}, \dots, Y_{t_i}] \leq X_{t_i}$ ，過程 $\{X_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 是一個supermartingale。
 3. 若條件期望滿足了 $E[X_{t_k} | Y_{t_0}, Y_{t_1}, \dots, Y_{t_i}] \geq X_{t_i}$ ，過程 $\{X_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 是一個submartingale。
- 簡單的說，一個 supermartingale 的過程具有下跌的趨勢，submartingale 的過程具有上漲的趨勢，而 martingale 的過程則是公平的，不具趨勢。

平賭Martingale (2/2)

- 若不特別提及資訊流的形式，則以原隨機過程的歷史訊息取代。在此情形下平賭的定義如下：
- 定義3.4(Martingale)：給定離散時間過程 $\{X_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 下，對任意時間 $0 \leq t_i \leq t_k$ ，
 1. 若條件期望滿足了 $E[X_{t_k} | X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_i}] = X_{t_i}$ ，過程 $\{X_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 是一個martingale。
 2. 若條件期望滿足了 $E[X_{t_k} | X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_i}] \leq X_{t_i}$ ，過程 $\{X_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 是一個supermartingale。
 3. 若條件期望滿足了 $E[X_{t_k} | X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_i}] \geq X_{t_i}$ ，過程 $\{X_{t_i}\}_{i=0}^{\infty}$ 是一個submartingale。

布朗運動的定義(1/2)

- 考慮連續時間下的隨機過程。若隨機過程 $\{W_t\}_{t \geq 0}$ 滿足下列性質，則此過程稱為韋納過程(Wiener process)或是布朗運動。
 1. 樣本路徑(sample path)連續
 2. $W_0 = 0$ (起始位置為 0)
 3. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ for $0 < s < t$ (增量服從常態分配)
 4. 若 $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$, $W_t - W_s \perp W_u - W_v$ (兩時間上不重疊的增量是互為獨立的)

布朗運動的定義(2/2)

- 連續時間下馬可夫性質與平賭的定義如下。
- 定義 3.5(Markov process)：在給定的資訊流 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ 下，隨機過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 稱為馬可夫過程若對時間 $0 < s < t$ 以及函數 h ，存在一函數 g 使得

$$E[h(X_t)|Y_{0 \leq u \leq s}] = g(Y_s) = E[h(X_t)|Y_s]$$

- 定義3.4(Martingale)：在給定的資訊流 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ 下，隨機過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 對任何時間 $0 < s < t$ ，
 1. 若條件期望滿足了 $E[X_t|Y_{0 \leq u \leq s}] = X_s$ ，過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 是一個martingale。
 2. 若條件期望滿足了 $E[X_t|Y_{0 \leq u \leq s}] \leq X_s$ ，過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 是一個supermartingale。
 3. 若條件期望滿足了 $E[X_t|Y_{0 \leq u \leq s}] \geq X_s$ ，過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 是一個submartingale。
- 定理 3.1：布朗運動既具有馬可夫性質，也是一個平賭。

第四節 布朗運動的推廣：伊藤過程

伊藤過程 (1/3)

- 廣義的增量記做 $\Delta X_{k\Delta t}$ ，是將服從常態分配的增量 $\Delta W_{k\Delta t}$ 做平移($r\Delta t$)與縮放(σ)如下， r, σ 為常數：

$$\Delta X_{k\Delta t} = r\Delta t + \sigma\Delta W_{k\Delta t} \sim \mathcal{N}(r\Delta t, \sigma^2\Delta t) \dots \dots (4-1)$$

- 同第一節的步驟，製造出一離散時間的隨機過程 X_{t_i} ，若 $X_{t_0} = x$ ，

$$X_{t_i} = x + \sum_{k=0}^{i-1} \Delta X_{k\Delta t}$$

- 將離散時間 Δt 趨近於 0，便得出以積分形式表達的極限過程 X_t ：

$$X_t = x + \int_0^t r ds + \int_0^t \sigma dW_s$$

伊藤過程 (2/3)

注意到，對 $X_t = x + \int_0^t r ds + \int_0^t \sigma dW_s$ ，

- 1. $X_0 = x$ ，
- 2. 隨機過程 X_t 是定義在連續時間之下，
- 3. 它的微分形式表成

$$dX_t = r dt + \sigma dW_t, X_0 = x \dots \dots (4-2)$$

- (4-2) 即「隨機微分方程式」(stochastic differential equation)，簡稱為 SDE。

伊藤過程 (3/3)

- 可以將與時間相關的係數（甚至是過程） r_t 與 σ_t 引入，定義出更一般的隨機過程 X_t 如：

$$X_t = x + \int_0^t r_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \dots\dots (4-3)$$

- 或

$$dX_t = r_t dt + \sigma_t dW_t, X_0 = x \dots\dots (4-4)$$

- r_t 與 σ_t 分別為 dt 項（稱為漂移項(drift term)），與 dW_t 項（稱為平賭項(martingale term)）的係數。在金融模型中，這些係數分別跟成長率(growth rate)與波動率(volatility)有關。

模擬分析：（Matlab 程式 4-1）

利用蒙地卡羅法模擬出標的資產價格

```
dt=T/NSteps; % 定義離散時間 dt 的大小
```

```
nudt=(r-0.5*sigma^2)*dt;
```

```
sqdt=sqrt(dt);
```

```
sidt=sigma*sqdt;
```

```
RandMat=randn(1,NSteps); % 以 randn 生成標準常態變量的隨機  
樣本
```

```
Increments=[nudt+sidt*RandMat]; % 式（3）的隨機樣本
```

```
LogPath=cumsum([log(S0),Increments],2); % 以 cumsum 進行累  
加的計算，模擬出  $X_{t_i}$ 。
```

```
SPaths=exp(LogPath) % 顯示一條服從幾何布朗運動  $e^{X_{t_i}}$  的股價
```

第五節 隨機積分的金融意義

隨機積分的金融意義 (1/2)

- 本章前幾節中使用到兩種類型的積分 $\int_0^T \theta_s ds$ 與 $\int_0^T \theta_s dW_s$ 。
- $\int_0^t \theta_s ds$ 可由一般微積分中積分的觀點來理解
- 假想在一個交易策略中， W_t 是資產 W 在時刻 t 的價格， θ_t 是投資部位（也就是在時刻 t 持有 W 的數量），那麼 $\int_0^T \theta_s dW_s$ 就是此策略自時刻 0 實施以來，累積到時刻 T 的總價值。
- 幾種常見的交易策略如下，對任意時間 $t \in [0, T]$ 。
 1. $\theta_t = 1$ ，此為「買進持有(buy and hold)」策略；
 2. $\theta_t = I(W_t < c)$ ，此為「停利 (stop profit)」策略， $c > 0$ 是停利點；
 3. $\theta_t = I(W_t > c)$ ，此為「停損 (stop loss)」策略， $c < 0$ 是停損點；
 4. $\theta_t = W_t$ ，此為「買高賣低 (buy high sell low)」策略；
 5. $\theta_t = \frac{1}{W_t}$ ，此為「買低賣高 (buy low sell high)」策略。

隨機積分的金融意義 (2/2)

- 定理 5.1 : 令 $I_t = \int_0^t \theta_s dW_s$, 則
 1. 隨機過程 I_t 是一平賭(martingale)
 2. (Ito Isometry) $var(I_t) = E[I_t^2] = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$
 3. $dI_t \cdot dI_t = \theta_t^2 dt$