

計量財務金融 金融科技

國立清華大學 計量財務金融學系/數學系
韓傳祥 著



CHAPTER 3 隨機微積分

Outline

第一節 源自金融的動機

第二節 伊藤公式

第三節 範例

第一節 源自金融的動機

隨機微積分與（一般）微積分的不同

- 著名的 Black-Scholes 模型採用了幾何布朗運動來描述資產價格，記做 S_t 。它的動態行為如下：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \dots \dots (1 - 1)$$

- 其中參數 μ 和 σ 分別代表了該資產的成長率(growth rate)和波動率(volatility)。
- 一個自然的問題是，當標的資產 S_t 的變動如式(1-1)時，它的衍生品價值 $P(t, S_t)$ 會如何改變呢？數學上等義的問題就是，如何對 $P(t, S_t)$ 進行微分？

- 在微積分的觀點下，對一個平滑函數 $f(t)$ 而言，

$$\frac{df(t)^2}{df(t)} = 2f(t) \text{ 或 } df(t)^2 = 2f(t)df(t)$$

- 但在隨機微積分中，應修正為（這個結果下一節會討論）

$$dW_t^2 = 2W_t dW_t + dt$$

計算 $\int_0^T W_t dW_t$

➤ 運用黎曼和計算積分 $\Delta t = \frac{T}{n}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} W_{\frac{kT}{n}} \left(W_{\frac{(k+1)T}{n}} - W_{\frac{kT}{n}} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left[W_{\frac{(k+1)T}{n}}^2 - W_{\frac{kT}{n}}^2 - \left(W_{\frac{(k+1)T}{n}} - W_{\frac{kT}{n}} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(W_{\frac{(k+1)T}{n}}^2 - W_{\frac{kT}{n}}^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(W_{\frac{(k+1)T}{n}} - W_{\frac{kT}{n}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} (W_T^2 - W_0^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(W_{\frac{(k+1)T}{n}} - W_{\frac{kT}{n}} \right)^2$$

$$(dW_t)^2 = dt$$

➤ $\sum_{k=0}^{n-1} \left(W_{\frac{(k+1)T}{n}} - W_{\frac{kT}{n}} \right)^2 \rightarrow T \text{ as } n \rightarrow \infty.$

➤ $W_{\frac{(k+1)T}{n}} - W_{\frac{kT}{n}} \sim N(0, \frac{T}{n}) \Rightarrow E \left[\left(W_{\frac{(k+1)T}{n}} - W_{\frac{kT}{n}} \right)^2 \right] = \frac{T}{n}.$

➤ 利用大數法則，

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(W_{\frac{(k+1)T}{n}} - W_{\frac{kT}{n}} \right)^2 \approx \frac{T}{n} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \left(W_{\frac{(k+1)T}{n}} - W_{\frac{kT}{n}} \right)^2 \approx T.$$

第二節 伊藤公式

伊藤公式(1/3)

- $\int_0^T dt dW_t = 0$ 、 $\int_0^T dW_t dW_t = T$ 。簡記為 $dt dW_t = 0$ 、 $dW_t dW_t = dt$ ，我們可以推出下表關係：
- 假設兩個一維度的布朗運動 W_{1t} 與 W_{2t} 互為獨立，則：

☞表 2-1 隨機微積分的運算表

$\cdot$	dt	dW_{1t}	dW_{2t}
dt	0	0	0
dW_{1t}	0	dt	0
dW_{2t}	0	0	dt

伊藤公式(2/3)

- 伊藤公式一(Itô's Formula I) :

- 給定 (無限可微分) 函數 $f(x)$ 與布朗運動 W_t , 則

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)dt$$

- 範例2.3 : 使用伊藤公式計算 dW_t^2

- 解法 : 令 $f(x) = x^2$, 應用公式一可得出 $dW_t^2 = 2W_t dW_t + dt$

伊藤公式—(Ito's Formula I)證明

➤ 根據泰勒展開式，

$$\begin{aligned}df(W_t) &= f(W_t + dW_t) - f(W_t) \\&= f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) (dW_t)^2 + o((dW_t)^2) \\&= f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) dt + o(dt) \\&= f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) dt\end{aligned}$$

伊藤公式(3/3)

- 伊藤公式二(Ito's Formula II)：

- 給定函數 $f(t, x)$ ，布朗運動 W_t ，與伊藤過程 S_t ， $dS_t = \alpha(t, S_t)dt + \beta(t, S_t) dW_t$ ，則

$$df(t, S_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, S_t)\beta^2(t, S_t) dt$$

- 範例2.4：令股價 S_t 服從 $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$ ，計算折現後股價的動態行為，也就是 $de^{-rt}S_t$ ，其中 e^{-rt} 是折現因子(discounting factor)。

- 解法：令 $f(t, x) = e^{-rt}x$ ，應用公式二可得出

$$de^{-rt}S_t = \sigma e^{-rt}S_t dW_t$$

由此隨機微分方程可看出，折現後的股價是平賭(martingale)。

範例2.4計算

$$\begin{aligned} \blacktriangleright f(t, x) &= e^{-rt}x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = -re^{-rt}x, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-rt}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ \Rightarrow d(e^{-rt}S_t) &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}(rS_t dt + \sigma S_t dW_t) \\ &= e^{-rt}\sigma S_t dW_t \\ \Rightarrow e^{-rT}S_T - S_0 &= \int_0^T e^{-rt}\sigma S_t dW_t \end{aligned}$$

伊藤公式二(Ito's Formula II)證明

➤ 根據泰勒展開式，

$$df(t, X_t) = f(t + dt, X_t + dX_t) - f(t, X_t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t, X_t) dt dX_t + o(dt) + o((dX_t)^2) + o(dt dX_t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) \beta(t, X_t)^2 dt$$

第三節 範例

幾何布朗運動Geometric Brownian motion

- 範例**3.1**：給定了 Black-Scholes 模型 $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ ，計算 $d \ln S_t$ ，並解出隨機過程 S_t 。

- 解法：令 $f(x) = \ln x$ ，則 $f'(x) = \frac{1}{x}$ ， $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ 。根據 Ito's Lemma，

$$df(S_t) = f'(S_t)dS_t + \frac{1}{2}f''(S_t)\sigma^2 S_t^2 dt = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t$$

- 將上式對時間變數 t 由 0 到 T 積分，得到

$$\ln S_T - \ln S_0 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma(W_T - W_0)$$

- 由於 $W_0 = 0$ 。因此，期末股價的自然對數 $\ln S_T$ 可以解出，並得知其服從一常態分配

$$\ln S_T - \ln S_0 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T$$

$$\ln S_T \sim \mathcal{N}\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right) \dots\dots (3-1)$$

- 自然地，期末股價稱之為對數常態過程(lognormal process)。指數轉換後期末股價如下

$$S_T = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T}$$

- 由於此解具有指數的形式，期末股價 S_T 亦稱為幾何布朗運動(geometric Brownian motion)。

均值回歸過程Ornstein-Ulenbeck Process (1/2)

- 顧名思義，均值回歸過程(mean-reverting process)是以某一個數值為中心線，沿著它上下震盪而變動的一種隨機過程。
- 一個著名的均值回歸過程是 Ornstein-Ulenbeck 過程，簡稱 O-U過程，以 r_t 表示，它服從隨機微分方程式

$$dr_t = \alpha(m - r_t)dt + \beta dW_t \quad \dots\dots(3-2)$$

- 其中的參數 α 是均值回歸率(mean-reverting rate)，代表了過程從震盪回復到均值的速度。參數 m 是長期平均 (long run mean) 的位置或是大小。參數 β 是波動率，代表了過程的振幅大小。

均值回歸過程Ornstein-Ulenbeck Process (2/2)

- 範例**3.2**：給定起始值 $r_0 = r$ ，解出OU過程 $dr_t = \alpha(m - r_t)dt + \beta dW_t$ 。
- 解法：令 $X_t = r_t - m$ ，則該方程式可化簡為 $dX_t = -\alpha X_t dt + \beta dW_t$
- 引入一積分因子 e^{at} ，以計算 $d(e^{at}X_t)$ 。應用伊藤公式二，得出

$$d(e^{at}X_t) = \alpha e^{at}X_t dt + e^{at}dX_t = e^{at}\beta dW_t$$

- 將等式兩邊積分後得出 $e^{at}X_t - X_0 = \int_0^t e^{as}\beta dW_s$
- 移項後並帶入 $r_t = X_t + m$ 可得

$$r_t = m + (r - m)e^{-at} + \beta \int_0^t e^{a(s-t)} dW_s$$

多維度的情形Multidimensional Case(1/2)

- 定理 3.1 : (二維的伊藤公式、伊藤乘積法則)

- 兩個 Ito processes X_t 與 Y_t 會滿足 :

$$\begin{aligned} 1. \quad df(X_t, Y_t) = & f_x(X_t, Y_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(X_t, Y_t)(dX_t)^2 + f_{xy}(X_t, Y_t)(dX_t dY_t) \\ & + f_y(X_t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2}f_{yy}(X_t, Y_t)(dY_t)^2 \end{aligned}$$

$$1. \quad d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$

多維度的情形Multidimensional Case(2/2)

- 範例**3.3**：給定 W_1 與 W_2 是兩個獨立的布朗運動

$$\begin{aligned}dX_t &= \Theta_{1t}dt + \sigma_{11t}dW_{1t} + \sigma_{12t}dW_{2t} \\dY_t &= \Theta_{2t}dt + \sigma_{21t}dW_{1t} + \sigma_{22t}dW_{2t}\end{aligned}$$

- 運用表 (2-1) 可得以下的結果： $dt dt = dt dW_{it} = dW_{it} dW_{jt} = 0$ ，若 $i, j \in \{1, 2\}$ 且 $i \neq j$ 然而 $dW_{it} dW_{it} = dt$ 。因此便可以算出，伊藤過程在兩維度下的計算：

$$\begin{aligned}dX_t dX_t &= (\sigma_{11t}^2 + \sigma_{12t}^2) dt \\dY_t dY_t &= (\sigma_{21t}^2 + \sigma_{22t}^2) dt \\dX_t dY_t &= (\sigma_{11t}\sigma_{21t} + \sigma_{12t}\sigma_{22t}) dt\end{aligned}$$

選擇權價格的動態 Dynamics of Option Prices (1/2)

- 範例**3.4**：假設某價格函數(pricing function) $P(t, S_t) \in \mathcal{C}^{1,2}$ 且過程 S_t 服從 $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$ ，則折現後的價格 $e^{-rt} P(t, S_t)$ 是一個隨機過程，根據 Itô's lemma 描述其動態行為。

- 解法：令 $X_t = e^{-rt}$ 與 $Y_t = P(t, S_t)$ 。應用伊藤乘積法則可得

$$de^{-rt} P(t, S_t) = e^{-rt} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + rS_t \frac{\partial P}{\partial x} - rP \right) (t, S_t) dt \\ + e^{-rt} \frac{\partial P}{\partial x} (t, S_t) \sigma S_t dW_t$$

如果折現後的價格是平賭(martingale)，則價格函數滿足一偏微分方程式。

選擇權價格的動態 Dynamics of Option Prices (2/2)

$$\begin{aligned} &\text{➤ } dX_t = -re^{-rt} dt \\ &\quad dY_t = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial P}{\partial x} r S_t \right) (t, S_t) dt + \frac{\partial P}{\partial x} (t, S_t) \sigma S_t dW_t \\ &\quad dX_t dY_t = 0 \\ &\text{➤ } de^{-rt} P(t, S_t) = \\ &\quad e^{-rt} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial P}{\partial x} r S_t \right) (t, S_t) dt + \frac{\partial P}{\partial x} (t, S_t) \sigma S_t dW_t \right] \\ &\quad + P(t, S_t) [-re^{-rt} dt] \\ &= e^{-rt} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial P}{\partial x} r S_t - rP \right) (t, S_t) dt \\ &\quad + e^{-rt} \frac{\partial P}{\partial x} (t, S_t) \sigma S_t dW_t \end{aligned}$$