計量財務金融
金融科技

國立清華大學 計量財務金融學系/數學系
韓傳祥 著

CHAPTER 5 BLACK-SCHOLES 訂價理論

Outline

第一節　自我融資的投資組合Self-Financing Portfolio
第二節　Black-Scholes 偏微分方程式
第三節　Black- Scholes 選擇權訂價公式
第四節　Feynman-Kac 公式：BS PDE的機率表示式
第五節　希臘字母與風險管理
第六節　遠期與期貨Forward and Futures

第一節 自我融資的投資組合Self-Financing Portfolio

動態交易策略 Dynamic Trading Strategy (1/2)

- 以下考慮一個歐式選擇權的訂價問題。
  - 假設一個歐式選擇權的報酬(payoff)為 $h(S_T)$ ；
  - S_T 是到期時的標的資產價格；
  - $h(x)$ 是報酬函數， $h(x)=(x-K)^+$ 是買權函數，$h(x)=(K-x)^+$ 是 賣權函數，K是履約價。
- 一個動態交易策略 (dynamic trading strategy)，乃是指一組隨機過程 (α_t, β_t)，其中 α_t 指該策略在時間t所需要持有股票（標的資產）的單位數，而 β_t 指需要持有的債券（無風險資產）單位數。假設時間 t 的債券價格為 e^{rt}，則此投資組合在時間 t 的價值為 $\alpha_t S_t+\beta_t e^{rt}$。
- 在到期日日 T 的時候，假設此投資組合的價值可以複製歐式選擇權的報酬 ，也就是說 $\alpha_T S_T+\beta_T e^{rT}=h(S_T)$ 。

動態交易策略 Dynamic Trading Strategy (2/2)

- 此外，我們也假設這個投資組合服從了自我融資(self-financing) 的條件，也就是說此投資組合價值的變動，是完全由標的資產價格變動及債券價格變動所決定。自我融資條件在數學 上以微分形式的表示示如下：

$$d\,(\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt}) = \alpha_t dS_t + r\beta_t e^{rt} dt$$

  - 備註：數學上的微分 $d\,(\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt})$ 當然不必然滿足自我融資條件。

- 應用用伊藤公式 (Itô's formula)，不難證明若交易策略 $\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt}$ 是一個自自我融資投資組合，則它折現後的價值為：

$$de^{-rt}(\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt}) = \alpha_t d(e^{-rt} S_t)$$

第二節 Black-Scholes 偏微分方程式

Black- Scholes PDE (1/4)

- Black-Scholes 模型是假設一個簡單的股票與現金存款賬戶(money market account)所構成的經濟體系，其中的股價S_t服從幾何布朗運動，

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \text{，}$$

- 起始股價是 $S_0 = x$。
- 存款賬戶的價值 B_t 服從一常微分方方程式 $dB_t = rB_t dt$，$B_0 = 1$， 因而 $B_t = e^{rt}$ 。
- 無套利訂價理論 (no arbitrage pricing theory) 是基於衍生品的價值 $P(t, S_t)$ ，必須等同於某一投資組合的價值。

Black- Scholes PDE (2/4)

- 在 Black-Scholes 模型的假設之下，$P(t, S_t)$ 由持有 α_t 單位的股票與 β_t 單位的現金賬戶所「複製(replication)」出來：

$$\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt} = P(t, S_t) \qquad (2\text{-}1)$$

- 否則存在套利利機會。在自我融資的假設條件下，應用伊藤引理於 式 (2-1)，可以導出：

$$(\alpha_t \mu S_t + \beta_t r e^{rt})\, dt + \alpha_t \sigma S_t dW_t \qquad (2\text{-}2)$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial P}{\partial x} dW_t$$

- 其中，所有關於 P 的偏微分都是在變數 $(t, S_t = x)$ 上計算，將上 式中等號兩邊 dW_t 的係數相等，我們可以得到：

$$\alpha_t = \frac{\partial P}{\partial x}(t, S_t) \qquad (2\text{-}3)$$

Black- Scholes PDE (3/4)

- 使得透過式 (2-1) 得到

$$\beta_t = (P(t, S_t) - \alpha_t S_t)e^{-rt} \qquad (2\text{-}4)$$

- 將 (2-3) 與 (2-4) 的結果代入 (2-2) 中，再讓等號兩邊 ***dt*** 項的係數相等可以得到：

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,S_t) + rS_t \frac{\partial P}{\partial x}(t,S_t) - rP(t,S_t) = 0}$$

Black- Scholes PDE (4/4)

- 此方方程式對任何股價$S_t > 0$及$0 \leq t < T$都成立（按：數學上嚴謹的說法是 almost surely）。
- 因此，以變數 x 代表 S_t，選擇權價值函數 $P(t, x)$ 是以下的 Black-Scholes 偏微分方程式(BS Pricing PDE)的解

$$\mathscr{L}_{BS} P(t, x) = 0 \qquad (2\text{-}5)$$

- 且期末條件 (terminal condition) 為 $P(T, x) = h(x)$。其中的偏微分算子：

$$\mathscr{L}_{BS}(\cdot) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx\frac{\partial}{\partial x} - r \right)(\cdot)$$

第三節 Black- Scholes 選擇權訂價公式

Black- Scholes Option Pricing Formula

- 將一個歐式買權的價格，記為 $C_{BS}(t, x)$ 。根據式 (2-5)，它會滿足 $\mathscr{L}_{BS}C_{BS}(t, x) = 0$, $C_{BS}(T, x) = (x - K)^+$，其中 T 是到期日，K是履約價。事實上可以利用微分方程中變數變換的方式，將此 Black-Scholes pricing PDE轉換成為一個熱傳導方程式，接著利用熱核(heat kernel)對期末條件做卷積，就可以推出下列的封閉解。在此我們雖不提供上式的推導，但會在下一節當中以機率的方式進行推導。歐式買權存在一個封閉解函數型式如下：

$$C_{BS}(t, x; T, K) = x\,\mathcal{N}(d_1) - K\,e^{-r(T-t)}\,\mathcal{N}(d_2) \qquad (3\text{-}1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{x}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$$\mathcal{N}(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1} e^{-u^2/2}du\,.$$

買賣權價平關係Put-call parity

- 買權與賣權存在一個有趣的關係，稱為買賣權價平關係(put-call parity)如下：

$$C_{BS}(t,x) - P_{BS}(t,x) = x - Ke^{-r(T-t)}$$

- 此決定性關係可由偏微分方程式

$$\mathcal{L}_{BS}(C_{BS} - P_{BS})(t,x) = 0$$

配合期末的邊界條件 $(C_{BS} - P_{BS})(T,x) = x - K$ 解出

$$\boxed{(C_{BS} - P_{BS})(t,x) = x - Ke^{-r(T-t)}}$$

波動率的估計

- 注意到從 Black-Scholes 公式當中，只有一個無法直接觀察的參數，也就是波動率σ，一般在實務上有兩種方法可以從市場上估計波動率：

1. 直接法：給定一組標的物的歷史價格，我們可以用
   - Log return 的最大概似法，或是
   - 先計算其報酬率，然後算出標準差：該量稱之為「歷史波動率(historical volatility)」。本書第四章第三節有詳細的介紹。

2. 隱含法：給定選擇權市場中，關於某到期日T與某履約價K 之歐式買權（或賣權）的成交價格，利用Black-Scholes 的評價公式反推出σ，稱作「隱含波動率(implied volatility)」，通常也記做 $\sigma_{imp}(T, K)$。

第四節 Feynman-Kac 公式：BS PDE的機率表示式

Feynman-Kac 公式：BS PDE 的機率表示式 Probabilistic Representation of BS PDE (1/2)

- 前幾節所推導的歐式選擇權價值函數，是用Black-Scholes PDE 的解來表達。這種表達式，對缺乏理工背景的人士可能頗不友善。所幸的是，透過 Feynman-Kac 公式，可以將 Black- Scholes PDE 的解，用機率論中的「條件期望」等義地表達出來。機率的表達式的優點：
  - 符合資產訂價中「折現」的 概念；
  - 具有統一架構，可以對更多不同形式的選擇權進行訂價。

- 選擇權價值函數的機率表達式，主在闡述以下的訂價原則：
  - 「在風險中立的機率測度下，折現後報酬的條件期望即為選擇權的價格」。
  - 這種描述選擇權價格為「折現後報酬的條件期望」，深受金融界的認可，唯一要特別注意的是，該計算必須在「風險中立的機率測度」之下。

Feynman-Kac 公式：BS PDE 的機率表示式 Probabilistic Representation of BS PDE (2/2)

- 定理 4.1： **(Feynman-Kac Formula)** 給定隨機微分方程 $dX_t = \beta(t, X_t)dt + \gamma(t, X_t)\, dW_t$，且 $h(y)$ 是報酬函數。對一固定時間 T， 由條件期望所定義出來的函數

$$g(t, x) = E\{e^{-r(T-t)}h(X_T) \mid X_t = x\},$$

- $g(t, x)$ 會滿足以下的 PDE

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + \frac{\gamma^2(t, x)}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) + \beta(t, x)\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) - rg(t, x) = 0 \quad \text{(4-2)}$$

  - 其中的期末邊界條件為 $g(T, x) = h(x)$。

- 此外，如果函數 $g(t, x)$ 滿足了以上的偏微分方程式(4-2) ， 它也可以被表示成條件期望的形式，如式(4-1)。

風險中立評價法(1/2)

- 我們已經在本章第 二節中，利用無套利方法推導出歐式選擇權的價值函數，它滿足了 Black-Scholes 訂價 PDE

$$\frac{\partial P(t,x)}{\partial t}+\frac{\sigma^2x^2}{2}\frac{\partial^2 P(t,x)}{\partial x^2}+rx\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}-rP(t,x)=0$$

- 期末條件為 $P(T, x) = h(x)$。若套用以上的 Feynman-Kac 定理， 則可以用一個條件期望來刻劃 PDE 的函數解 $P(t, x)$ ，

$$P(t,x)=E^{\star}\{e^{-r(T-t)}h(S_T)\mid S_t=x\}，$$

- 其中股價的動態行為滿足 Black-Scholes 模型

$$dS_t=r\,S_t\,dt+\sigma\,S_t\,d\,W_t^{\star} \qquad (4\text{-}3)$$

風險中立評價法(2/2)

- 為了強調機率（測度）的獨特性，符號上使用了星號⋆來代表「風險中立(risk neutral)」的機率測度。金融上來說，風險中立意指股價的成長率會與無風險利利率一致。

- 由式（4-3）可立刻看出，此時 Black-Scholes 模型是定義在一個風險中立的機率測度之下。

推導 Black-Scholes 買權公式

$$C_{BS}(t, x) = E^{\star}\{e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ \mid S_t = x\}$$

- 其中股價服從了 $S_T = S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Z}$ ， $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$
- 則可將上式寫成積分的形式

$$\boxed{C_{BS}(t,x) = \int_{z^*}^{\infty} e^{-r(T-t)}\left(xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z} - K\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz}$$

- 這是利用了指數函數是遞增的性質，以及 $K = xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z^*}$
- 也就是 $\boxed{z^* = \dfrac{\ln(K/x) - (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}$ ，透過計算即可得到結果。

第五節 希臘字母與風險管理

希臘字母Greek Letters

- 為了對選擇權等風險性資產進行有效的風險控管，市場上非常重視敏感度分析(sensitivity analysis)；也就是選擇權價值函數對於各樣的變數（例如時間t，標的物價格x）與各樣的參數（例如無風險利利率 r，波動率 σ）的導數，並將這些偏微分統稱 為「希臘字母(Greek letters)」。

- 譬如說，$\partial P / \partial t$ 叫做 (Theta)，$\partial P / \partial x$ 叫做 (Delta) ，$\partial^2 P / \partial x^2$ 叫做 (Gamma) ，$\partial P / \partial r$ 叫做 (Rho) ，$\partial P / \partial \sigma$ 叫做 (Vega)，其中有趣的是，Vega 非屬原來真正的希臘字母，但由於在金融實務中常用，也就被納入金融工程中所謂的「希臘字母」。

Black-Scholes 公式中的希臘字母

- 以買權的價值函數為例，對賣權而言，其希臘字母僅需再參考式 (3-2) 修正後即可。

$$\Theta\left(\text{Theta}\right) = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{-x\sigma}{2\sqrt{T-t}}\mathcal{N}'(d_1) - Kre^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(d_2\right)$$

$$\Delta\left(\text{Delta}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} = \mathcal{N}\left(d_1\right)$$

$$\Gamma\left(\text{Gamma}\right) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\mathcal{N}'(d_1)}{x\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\rho\left(\text{Rho}\right) = \frac{\partial P}{\partial r} = \left(\mathrm{T}-\mathrm{t}\right)\mathrm{K}e^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(d_2\right)$$

$$\mathrm{V}\left(\text{Vega}\right) = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = x\sqrt{T-t}\,\mathcal{N}'\left(d_1\right)$$

對密度函數的微分算 Greek letters

- 一般歐式選擇權的希臘字母：

$$\Delta = \frac{e^{-rT}}{S_0 \sigma T} E^{\star}\left[\Phi\left(S_T\right) W_T^{\star}\right]$$

$$V = \frac{e^{-rT}}{\sigma T} E^{\star}\left[\Phi\left(S_T\right)\left(W_T^{\star 2} - \sigma T W_T^{\star} - T\right)\right]$$

$$\Gamma = \frac{e^{-rT}}{S_0^2 \sigma T} E^{\star}\left[\Phi\left(S_T\right)\left(\frac{W_T^{\star 2}}{\sigma T} - W_T^{\star} - \frac{1}{\sigma}\right)\right]$$

風險管理的應用

- 一投資人欲投資某股票價格 S，以及它的買權價格 C ，賣權價格P，且部位分別是 α_S 、α_C 、α_P。此投資組合的總價值就是：

$$W = \alpha_S \times S + \alpha_C \times C + \alpha_P \times P \text{。}$$

- 則此投資組合的：

delta 記做 $\Delta_W = \alpha_S + \alpha_C \times \frac{\partial C}{\partial S} + \alpha_P \times \frac{\partial P}{\partial S}$

gamma 記做 $\Gamma_W = \alpha_C \times \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \alpha_P \times \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}$

vega 記做 $v_W = \alpha_C \times \frac{\partial C}{\partial \sigma} + \alpha_P \times \frac{\partial P}{\partial \sigma}$

第六節　遠期與期貨Forward and Futures

遠期Forward

- **遠期契約Forward Contract**
  - 規範了交易雙方在不須支付任何費用之下，可以用一個事前約定好了的價格 K，在未來的某一個時間點 T，來買或賣某個資產。本書的第一章中有深入地介紹。
- 對遠期契約的買方來說，該契約的報酬函數為 $S_T - For_S(t,T)$。由於進入或持有該契約不須支付任何代價，因此訂價方程式成立：

$$\boxed{E^\star\left[D_{t,T}\left(S_T - For_S(t,T)\right) \mid S_t\right] = 0}$$

  - 其中 Dt,T = e−r(T−t) 是從時間 t 到 T 的折現因子，當無風險利率 是常數 r。由資產在風險中立測度下 martingale 的性質

$$\boxed{E^\star\left[D_{0,T}\, S_T \mid S_t\right] = D_{0,t}\, S_t}$$

  - 以及債券 B(t, T) = e−r(T−t) 的定義，可得 ForS(t, T) = St /B(t, T)。

期貨Futures(1/2)

- **期貨（Futures）**
  - 遠期契約提供了買賣雙方互換價格（或稱作市場風險(market risk)）的機會，它通常在店頭市場 (over the counter, OTC) 中交易。
  - 此類契約的立意雖好，但無法規避買賣雙方在履約之前潛在的信用風險 (credit risk)。市場就發展出集中交易所 (ex-change)以嚴格限定參與市場的會員投資機構，並且用「保證金」機制 (margin mechanism) 來減少信用風險，而這種遠期契約就稱之為期貨。

期貨Futures(2/2)

- 期貨契約的價值定義如下 $Fut_S(t,T) = E^\star\left[S_T \mid S_t\right]$
- 當無風險利率是常數時，遠期與期貨的價值會一樣， 這是由於利用折現後的標的物價格是一個 martingale，可導出：

$$Fut_S(t,T) = e^{rT}E^\star\left[e^{-rT}S_T \mid S_t\right] = \frac{S_t}{B(t,T)}$$

- 當利率是隨機的時候，上式雖不再成立，不過遠期與期貨的價差 (forward-futures spread) 卻能成為衡量債券與現貨相關性的指標，這是由於

$$\begin{aligned}
For_S(0,T) - Fut_S(0,T) &= \frac{S_0}{E^\star\left[D_{0,T}\right]} - E^\star\left[S_T\right] \\
&= \frac{1}{E^\star\left[D_{0,T}\right]}\left(E^\star\left[D_{0,T}\,S_T\right] - E^\star\left[D_{0,T}\right]\,E^\star\left[S_T\right]\right) \\
&= \frac{1}{E^\star\left[D_{0,T}\right]}Cov\left(D_{0,T}, S_T\right)
\end{aligned}$$

- 其中的 $S_0 = E^\star\left[D_{0,T}S_T \mid S_0\right]$ ，是用到了本章範例 4.2 的一個推廣結果：折現後股價，在風險中立機率測度下，是一個 martingale。