

計量財務金融 金融科技

國立清華大學 計量財務金融學系/數學系
韓傳祥 著



CHAPTER 6 訂價理論之延伸

Outline

第一節 新奇選擇權

第二節 美式選擇權評價

第三節 股利情形

第四節 期貨選擇權

第五節 從連續到離散：二元數模型

第一節 新奇選擇權 Exotic Option

二元選擇權 Binary Option (1/3)

- 二元選擇權的報酬函數，是一個取值為 0 或 1 的階梯函數(step function)。也就是說，在到期日時，若標的資產價格處於價內(in the money)，就得到全部的收益；若標的資產在價外(out of the money)，就什麼也得不到，這是在假設價平(at the money)機率為 0 的情形下。
- 因此，這是一個高風險，也是高收益的投資。
- 舉例來說，一個今天發行的二元選擇權契約，規範了一年結束之後，如果 XYZ 公司的股票價格高於每股 50 美元，會支付一百萬美元。則不管在到期時，股票是 50.01 或者是 100 美元（皆為價內的情形），該收益將仍然是一百萬美元。

二元選擇權 Binary Option (2/3)

- 運用第五章第四節中的「風險中立評價」法，二元選擇買權的價值函數是

$$P(t, x) = E^* \left\{ e^{-r(T-t)} NI(S_T > K) | S_t = x \right\}$$

- 假設 s_t 代表標的價格， K 是履約價， N 代表收益。也就是說，二元選擇權的價值計算，為在風險中立的機率測度之下，將折現後的收益，乘上到期時 XYZ 的股價是價內的機率。
- 當 N 是一個固定的數值，此二元選擇權的收益報酬稱作「現金或零報酬(cash or nothing)」；當 N 是一浮動的數值如標的 s_T ，此二元選擇權的收益報酬稱作「資產或零報酬(asset or nothing)」。因此，二元選擇權也稱之為數位選擇權(digital option)，並可規劃成買權或賣權形式。

二元選擇權 Binary Option (3/3)

- 範例1.1：歐式買權可以拆解成為以下的投資組合--買入(long)「資產或零報酬」的二元買權和賣出(short)「現金或零報酬」的二元買權。

- 解法：僅需將歐式買權的報酬函數進行拆解，成為

$$(S_T - K)^+ = S_T I(S_T > K) - K I(S_T > K)$$

- 然後在同一個風險中立的機率測度之下，將折現後的收益報酬，取了（條件）期望即可。

- 在 Black-Scholes 模型下的訂價 PDE 為

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) - rP(t, x) = 0$$

- 且期末條件 (terminal condition)，例如是「現金或零報酬」買權 $P(T, x) = N I(x > K)$ ，則其封閉解如下

$$P(0, S_0) = Ne^{-rT} \mathcal{N}(d_2(0, S_0))$$

障礙式選擇權 Barrier Option (1/5)

- 當標的資產價格在演變時，若通過一些預定的關卡，障礙選擇權就被開啟 (activate) 或關閉。相較於歐式選擇權，障礙選擇權的報酬具有條件性。它不僅依賴於在到期日時標的資產價格，還跟期滿前的路路徑有關。自然地，它們被稱為路徑相依 (path dependent) 的選擇權。
- 障礙選擇權報酬的開啟或關閉的方式，分別通常稱為入局式 (knock-in) 與出局式 (knock-out)。

障礙式選擇權 Barrier Option (2/5)

- 入局式

- 當標的資產價格觸及某障礙價格B，選擇權才生效。
- 報酬型式：下降入局式 $I(\min_{0 \leq t \leq T} S_t < B)H(S_T)$
- 報酬型式：上升入局式 $I(\max_{0 \leq t \leq T} S_t > B)H(S_T)$
- 兩種報酬型式，其中 $H(S_T)$ 表示期末報酬，通常為一買權 (call)或賣權 (put)。

- 出局式

- 當標的資產價格觸及某障礙價格B，選擇權會失效。
- 報酬型式：下降出局式 $I(\min_{0 \leq t \leq T} S_t > B)H(S_T)$
- 報酬型式：上升出局式 $I(\max_{0 \leq t \leq T} S_t < B)H(S_T)$

障礙式選擇權 Barrier Option (3/5)

- 障礙選擇權的期末報酬函數可能是 call 或 put，所以障礙選擇權的報酬總共有八種可能的型式如下：
 1. 下降入局式 (down and in) call
 2. 上升入局式 (up and in) call
 3. 下降入局式 (down and in) put
 4. 上升入局式 (up and in) put
 5. 下降出局式 (down and out) call
 6. 上升出局式 (up and out) call
 7. 下降出局式 (down and out) put
 8. 上升出局式 (up and out) put

障礙式選擇權 Barrier Option (4/5)

- 舉例來說，上升出局式買權 (up and out call) 的報酬為 $I(\max_{0 \leq t \leq T} S_t < B)(S_T - K)^+$
運用「風險中立評價」法，此上升出局式買權的價值函數是

$$P(t, x) = E^* \left\{ e^{-r(T-t)} I(\max_{0 \leq t \leq T} S_t < B)(S_T - K)^+ | S_t = x \right\}$$

- 此外，在 Black-Scholes 模型下，等價的訂價 PDE 為

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) - rP(t, x) = 0$$

而其邊界條件為 $P(t, B) = P(t, 0) = 0, 0 \leq t \leq T$ 且 $P(T, x) = (x - K)^+$ 。

$$P(0, S_0) = S_0 [N(\delta_1(T - t, S_0/K)) - N(\delta_1(T - t, S_0/B))]$$

障礙式選擇權 Barrier Option (5/5)

- 此訂價 PDE 的封閉解如下

$$\begin{aligned} P(0, S_0) = & S_0 [N(\delta_1(T-t, S_0/K)) - N(\delta_1(T-t, S_0/B))] \\ & - e^{-rT} K [N(\delta_2(T-t, S_0/K)) - N(\delta_2(T-t, S_0/B))] \\ & + B \left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \left[N\left(\delta_1\left(T-t, \frac{B^2}{KS_0}\right)\right) - N\left(\delta_1\left(T-t, \frac{B}{S_0}\right)\right) \right] \\ & + e^{-rT} K \left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \left[N\left(\delta_2\left(T-t, \frac{S_0}{K}\right)\right) - N\left(\delta_2\left(T-t, \frac{S_0}{K}\right)\right) \right] \end{aligned}$$

- 其中 $\delta_1(\tau, s) = \frac{\ln(s) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}$ 且 $\delta_2(\tau, s) = \frac{\ln(s) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}$

- 其它報酬形式的障礙選擇權價格，其 PDE 的邊界條件以及封閉解皆可被類似的推導出來。

障礙選擇權的市場價值

- 障礙選擇權的收益報酬相較於對應的歐式選擇權，它的限制條件較多，所以價格也較低。
- 對一個基金經理人來說，為了保持基金獲利的穩定性，可以買一個 put 作為避險。
- 若該基金中資產價格如他（她）預期不斷的上升的話，選擇權在到期時雖不會實現，但 long 障礙選擇賣權付出的避險成本較歐式賣權低廉。
- 若資產價格真的下跌，障礙選擇權會被「開啟」，進而達到跟歐式選擇權一樣的避險功能。

回顧選擇權Lookback Option (1/3)

- 回顧選擇權
 - 投資人可根據在一段特定期間內，股價的最高價或是最低價來定義報酬的型式。
 - 通常可分為浮動履約價回顧選擇權，及固定履約價回顧選擇權。
 - 回顧選擇權可以應用在基金管理，使得投資組合的報酬率比較穩定。假設基金過去的績效勝過指數，經理人可以購買一些明年到期的回顧選擇買權或賣權。通過花費一些現在的收益，投資在回顧選擇權上，以協助基金經理人能夠達到未來的績效目標。

回顧選擇權Lookback Option (2/3)

- 舉例來說，浮動履約回顧買權 (Floating Strike Lookback Call Option) 的報酬為 $(Y_T - S_T)$ 其中 $Y_t = \max_{0 \leq u \leq t} S_u$, $0 \leq t \leq T$ 為最大值過程 (running maximum process)。此回顧選擇權的價值訂為

$$P(t, S_t, Y_t) = E^* \left\{ e^{-r(T-t)} (Y_T - S_T) | S_t, Y_t \right\}$$

- 在Black-Scholes模型下，定價函數 $P(t, x, y)$ 所滿足的PDE是

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, x, y) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x, y) + rx \frac{\partial P}{\partial x}(t, x, y) - rP(t, x, y) = 0$$

- 而邊界條件是

$$P(t, 0, y) = e^{-r(T-t)} y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} P(t, y, y) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, 0 \leq y, \quad P(T, x, y) = y - x, \quad 0 \leq x \leq y$$

- 注意到此 PDE 有兩個變數 x 與 y ，是所謂的二維 PDE，較先前一維度的 Black-Scholes PDE 複雜許多。已有一些維度縮減法 (dimension reduction technique) 將此訂價 PDE 轉換為一維度的問題。

回顧選擇權Lookback Option (3/3)

- 上述浮動履約的回顧選擇權有封閉解

$$P(t, x, y) = yu\left(t, \frac{x}{y}\right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < x \leq y$$

- 其中，令 $z = \frac{x}{y}$, $0 < z \leq 1$

$$u(t, z) = \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) z \mathcal{N}(d_1(T-t, z)) + e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2(T-t, z)) \\ - \frac{\sigma^2}{2r} e^{-r(T-t)} z^{1-2r/\sigma^2} \mathcal{N}(-d_2(T-t, z^{-1})) - z$$

複合選擇權 Compound Option (1/3)

- 複合選擇權提供投資人，買或賣另一個選擇權的權利。它們比起傳統的選擇權，可以創造更大的槓桿。
- 就財務理論來說，[Black-Scholes \(1973\)](#) 年的經典論文中便提及公司的股價可視為一種複合選擇權的價值。[Geske \(1979\)](#) 推導出第一個買權在買權 (call on call) 之複合選擇權價格的封閉解，後來複合選擇權被發現可以用來逼近美式選擇權的價格，或用來成為一個投資組合的保險 (option on portfolios) 等其它應用。精要的來說，複合選擇權是一種讓投資人得以鎖定「遠期波動率(forward volatility)」的投資工具，它對一籃子選擇權可提供有效的避險方式。
- 一個複合選擇權賦予持有人權力，而非義務，去買(long)，或賣(short)標的「選擇權」。為了簡化起見，在此僅考慮歐式的複合選擇權。複合選擇權是一個選擇權，假設它的到期日是 T ，履約價是 K 。複合選擇權的標的是另一個選擇權，假設它的到期日是 T_1 ，履約價是 K_1 ，而其標的資產是 S_T 。

複合選擇權 Compound Option (2/3)

- 舉例來說，一個歐式買權在一個歐式買權上的價值函數 $V(t, x)$ 定義如下

$$V(t, x) = E^* \{ e^{-r(T-t)} (C_{BS}(T, S_T; T_1, K_1) - K)^+ | S_t = x \}$$

- 其中最底層真正的標的資產為 S ，假設服從了Black-Scholes 模型，

$$S_T = S_t \exp \left((r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma \sqrt{T-t} Z \right), \quad Z \sim N(0, 1)$$

- 標的歐式買權在時間 T ，股價 S_T 時的價格記為 $C_{BS}(T, S_T; T_1, K_1)$ ，它當然滿足了Black-Scholes 公式。
- 在 Black-Scholes 模型下，我們可以推導出一個歐式買權在歐式買權上價值函數的封閉解如下：

$$V(t, x) = x \mathcal{N}_2(y'^*, d_1^*, \rho) - K_1 e^{-r(T-t)} \mathcal{N}_2(-\zeta^*, d_2^*, \rho) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-\zeta^*)$$

- 其中

$$y'^* = \sigma \sqrt{T-t} - \zeta^*, \quad d_1^* = \frac{\ln \left(\frac{x}{K_1} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T_1 - t)}{\sigma \sqrt{T_1 - T}}$$

$$d_2^* = d_1^* - \sigma \sqrt{T_1 - t}, \quad \rho = \sqrt{\frac{T-t}{T_1 - T}}$$

- 而 $\mathcal{N}_2(\cdot, \cdot, \rho)$ 表示雙變量常態分佈的積分函數，當共變異為 ρ 時。

複合選擇權 Compound Option (3/3)

- 另外也可以使用 PDE 的解法，不過就必須解兩條遞迴的 PDE 如下：

1. 先解標的買權 $C_{BS}(t,x)$ 的價值函數

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial x^2} + rx \frac{\partial C_{BS}}{\partial x} - rC_{BS} = 0 \\ C_{BS}(T_1, x) = (x - K_1)^+ \end{cases}$$

2. 其次解出複合買權 $V(t,x)$ 的價值函數

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rx \frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0 \\ V(T, x) = (C_{BS} - K)^+ \end{cases}$$

亞式選擇權 Asian Option (1/2)

- 亞式選擇權類似於回顧選擇權，不同點在於回顧選擇權是基於價格路徑當中的最大或是最小值，而亞式選擇權是基於標的價格路徑的平均值。亞式選擇權是一種路徑相依的選擇權，它的報酬形式基本上是將路徑中的價格做某種算術平均 (arithmetic average)。
- 例如一固定履約價的亞式買權報酬為

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)^+$$

- 若可浮動的履約價為 S_T 則該亞式買權報酬為

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - S_T \right)^+$$

亞式選擇權 Asian Option (2/2)

- 頗令人訝異的是，亞式選擇權價值函數的封閉解至今尚未被發現，因此必須倚賴於數值計算。
- 由於在 Black-Scholes 模型假設下，亞式選擇權的訂價 PDE 是二個維度，這會拖慢數值 PDE 方法的計算時間。理論上，這種現象稱作「**維度詛咒(curse of dimensionality)**」。
- 蒙地卡羅模擬法是少數不受到「維度詛咒」的計算方法，所幸以蒙地卡羅模擬法去計算亞式選擇權的價值十分容易，特別是以控制變異法 (control variate method) 來估計該價值非常有效。這使得蒙地卡羅法 (Monte Carlo method) 在計算金融 (computational finance) 佔有重要的角色。

第二節 美式選擇權評價Pricing American Option

美式選擇權評價

- 美式選擇權(American option) 與歐式選擇權唯一不同之處，在於選擇權持有人(holder) 擁有提早履約 (early exercise) 的權利。由於賦予更多的權利，很自然的，美式選擇權的價值會比同樣規格的歐式選擇權契約昂貴。一個特例是美式買權在 Black-Scholes 模型下（不支付股利），可被證明出不值得提早履約，因此美式買權與歐式買權的價值在這些條件下是相等的。

- 美式選擇權的價格函數 $P_{\text{am}}(t, x)$ 可以被定義為以下聯立方程組的解：

$$\begin{cases} L_{\text{BS}} P_{\text{am}}(t, x) = 0, & x > x^*(t), \\ P_{\text{am}}(t, x) = (K - x)^+, & x \leq x^*(t) \end{cases}$$

- 其中臨界股價 $x^*(t)$ 也是未知的。
- 這類的聯立偏微分方程組的問題稱之為「自由邊界問題」(free boundary problem)，此方程至今尚無封閉解。不過，它仍然有機率的表示式

$$P_{\text{am}}(t, x) = \sup_{t \leq \tau \leq T} E^* \left[e^{-r(T-t)} (K - S_\tau)^+ | S_t = x \right]$$

- 其中 τ 是停止時間(stopping time)。

第三節 股利情形

股利情形 Dividend

- 在股票市場中，常會聽到某檔股票的股利率 (dividend rate)，或稱為殖利率 (yield rate)，是多少。股利率代表了股利 (dividend) 相對於期初（通常是一年）股價的報酬率。為了吸引投資人購買或繼續持有股票，實務中許多股票會配發股利或贈品，但這不見得是公司治理有方，或是股價已經上漲。

無套利表示法 (1/2)

- 為了簡化起見，假設股利是連續的發放，年化的股利率記為 q ，它會削減不發放時的成長率 μ 。

- 因此在 Black-Scholes 模型之下，股價或指數價格的動態行為會服從

$$dS_t = (\mu - q)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- 起始價格在 $S_0=x$ 。

1. 利用股票與債券形成一個部位分別是 α_t 與 β_t 的投資組合 $V = \alpha_t S_t + \beta_t e^{rt}$ 。
由於自我融資的特性，投資組合的價值變動為

$$\begin{aligned} dV_t &= \alpha_t dS_t + \beta_t d e^{rt} + q \alpha_t S_t dt \\ &= (\alpha_t \mu S_t + \beta_t r e^{rt}) dt + \alpha_t \sigma S_t dW_t \end{aligned}$$

無套利表示法 (2/2)

2. 投資組合 $V = \alpha_t S_t + \beta_t e^{rt}$ 是用來完美複製選擇權 $P(t, S_t)$ 的：

$$V_t = P(t, S_t)$$

$$\begin{aligned} dP(t, S_t) &= \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial x} dS_t + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dt \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu - q) S_t \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) dt + \sigma S_t dW_t \frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned}$$

- 因此可得，

$$\alpha_t = \frac{\partial P}{\partial x}(t, S_t), \quad \beta_t = \left(P(t, S_t) - \frac{\partial P}{\partial x}(t, S_t) S_t \right) e^{-rt}$$

- 與訂價方程式

$$\frac{\partial P(t, S_t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 P(t, S_t)}{\partial x^2} + (r - q) S_t \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial x} - r P(t, S_t) = 0$$

風險中立表示法

- 利用Feynman-Kac公式，我們可以將 $P(t,x)$ 用以下的方式表達出來：

$$P(t, x) = E^* \left[e^{-r(T-t)} h(S_T) | S_t = x \right]$$

- 其中，股價的動態行為滿足：

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t dW_t^*$$

- 以歐式買權來說，其封閉解為：

$$P(t, x) = x e^{-q(T-t)} \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2)$$

- 其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}, \quad \mathcal{N}(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-z^2/2} dz$$

估計股利率

- 利用買賣權的價平關係（put-call parity），更是容易將股利率推導出來：

$$C(t, x) = E^{\star} \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ | S_t = x \right]$$

$$P(t, x) = E^{\star} \left[e^{-r(T-t)} (K - S_T)^+ | S_t = x \right]$$

- 將兩式相減，得到：

$$C(t, x) - P(t, x) = e^{-q(T-t)} S_t - e^{-r(T-t)} K$$

- 因此，股利率可以被估計為：

$$q = \frac{1}{T-t} \ln \left(\frac{S_t}{C(t, x) - P(t, x) + e^{-r(T-t)} K} \right)$$

- 稱作**隱含股利率**。

第四節 期貨選擇權

期貨選擇權 Future Option (1/2)

- 同樣假設股價或指數價格的動態行為會服從

$$dS_t = (\mu - q)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- 起始價格在 $S_0 = x$ 。

- 期貨的價格 F_t 在到期日 T_2 時可以訂為 $F_t = E^*[S_{T_2} | S_t]$

- 由於 $e^{-(r-q)t} S_t$ 是一個martingale：

$$e^{-(r-q)t} S_t = E^*[e^{-(r-q)T_2} S_{T_2}], \quad F_t = e^{(r-q)(T_2-t)} S_t$$

- 由於 $S_T = S_t e^{(r-q-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Z}$, $Z \sim N(0, 1)$

- 期貨價格的機率分配為：
$$F_T = F_t e^{-\sigma^2/2(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Z}$$

期貨選擇權 Future Option (2/2)

- 現在考慮選擇權評價問題，假設標的期貨的到期日是 T_2 ，選擇權的到期日是 $T_1(\leq T_2)$ ，期貨選擇權的價值函數訂為：

$$P_S(t, x) = E^* \left[e^{-r(T_1-t)} h(F_{T_1}) | S_t = x \right]$$

- 在歐式買權的情況下

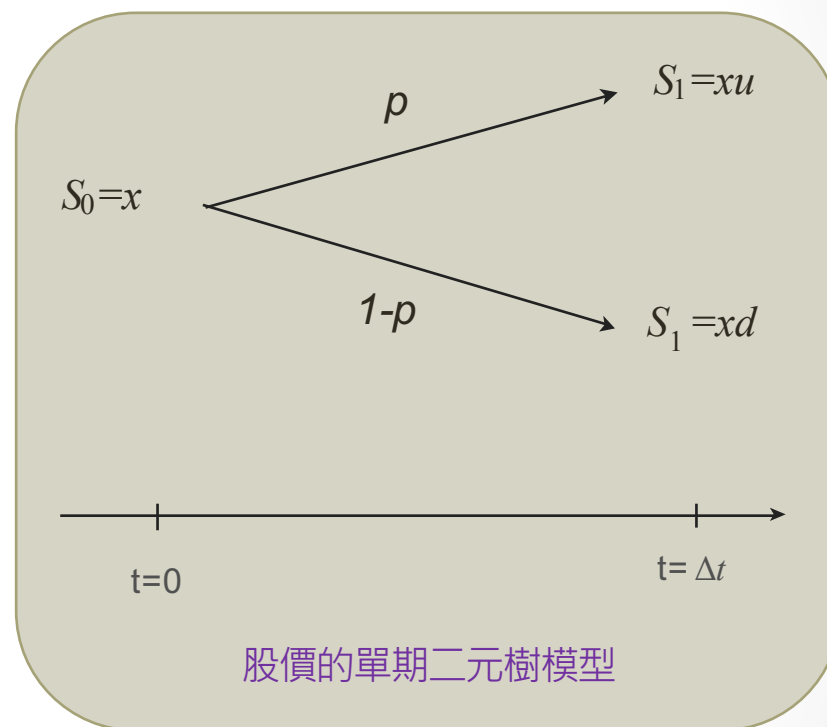
$$P_F(t, F_t) = e^{-r(T-t)} [F_t \mathcal{N}(d_1) - K \mathcal{N}(d_2)]$$

- 此為Black's formula，是一個著名的結果。

第五節 從連續到離散：二元數模型

二元樹模型 Binomial Tree Model (1/3)

- 單期二元樹模型
 - 假設風險性標的資產的起始股價是 $S_0=x$ ，經過了以 Δt 為單位的一個期間之後，股價 $S_1=S_{\Delta t}$ 。若不是以機率 $0 < p < 1$ 上漲成為 xu ，就是以機率 $1-p$ 下跌成為 xd 。無風險性資產的起始債券價格是 1，以無風險利率 r 連續複利，一期後累積的本利和是 $e^{r\Delta t}$ 。
- 現考慮一歐式買權契約，履約價為 K ，一期後到期，則期初時該選擇權的價值 P_0 為何？



二元樹模型 Binomial Tree Model (3/3)

- 無套利評價法：

- 假設在期初時，投資組合是由 α 單位的股票和 β 單位的債券所構成，使得在期末時，投資組合的價值會滿足以下方程式

$$\alpha S_1 + \beta e^{r\Delta t} = (S_1 - K)^+$$

- 也就是

$$\alpha xd + \beta e^{r\Delta t} = (xd - K)^+$$

$$\alpha xu + \beta e^{r\Delta t} = (xu - K)^+$$

- 因此得到

$$\alpha = \frac{(xu - K)^+ - (xd - K)^+}{x(u - d)}, \quad \beta = \frac{(xu - K)^+ - \alpha xu}{e^{r\Delta t}}$$

- 進而得到

$$P_0 = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} e^{-r\Delta t} (xu - K)^+ + \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} e^{-r\Delta t} (xd - K)^+$$

二元樹模型 Binomial Tree Model (3/3)

- 風險中立評價法：

- 進一步假設 $0 < d < e^{r\Delta t} < u$ 且令 $0 < p^* = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} < 1$

- 則

$$\begin{aligned} P_0 &= e^{-r\Delta t} (p^*(xu - K)^+ + (1 - p^*)(xd - K)^+) \\ &= E^* \{e^{-r\Delta t} (S_1 - K)^+ | S_0 = x\} \end{aligned}$$

- 其中 p^* 稱作風險中立機率。

二元樹模型參數估計

- 服從幾何布朗運動的股價可以表示為

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- 離散化後得到

$$S_T = S_t e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z}, \quad Z \sim N(0, 1)$$

- 對應二元樹上漲、下跌的股價，我們可以得到

$$S_{t\pm\Delta t} = S_t e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t \pm \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

- 亦即

$$\begin{aligned} u &= e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned}$$

兩期二元樹模型

- 仿照單期的模型，我們先算在第一個節點的歐式選擇權價值：

$$P_1(S_1 = xu) = E^* \{e^{-r\Delta t}(S_2 - K)^+ | S_1 = xu\}$$

$$P_1(S_1 = xd) = E^* \{e^{-r\Delta t}(S_2 - K)^+ | S_1 = xd\}$$

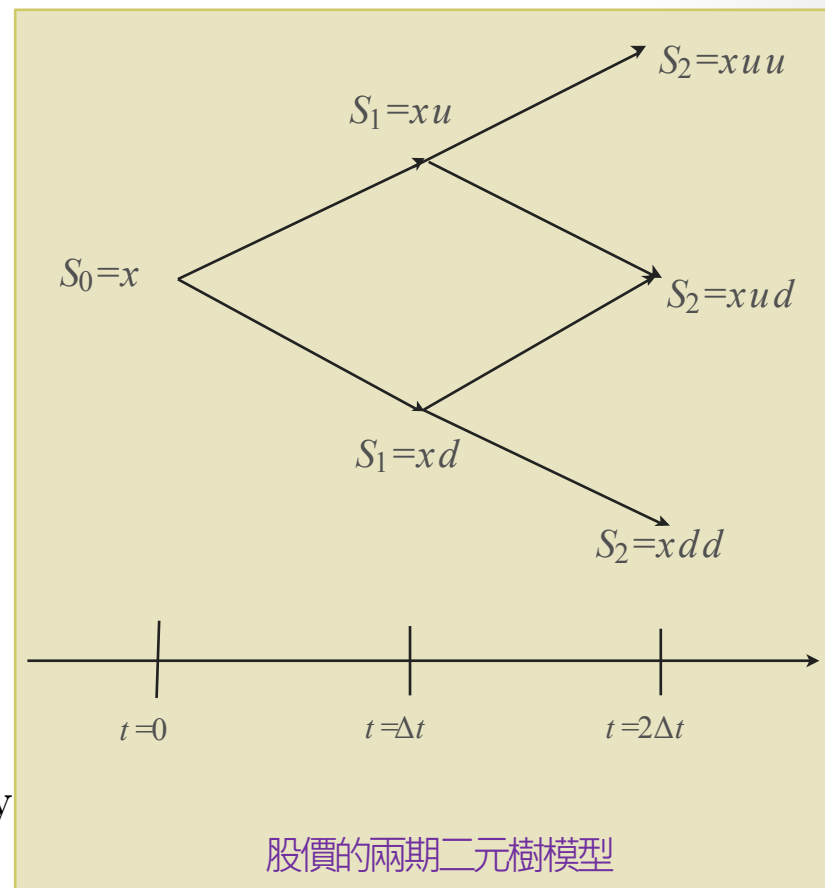
- 進一步推算在起始節點的價值：

$$P_0(S_0 = x)$$

$$= p^* e^{-r\Delta t} P_1(S_1 = xu) + (1 - p^*) e^{-r\Delta t} P_1(S_1 = xd)$$

$$= E^* \{e^{-r\Delta t} E^* \{e^{-r\Delta t}(S_2 - K)^+ | S_1\} | S_0 = x\}$$

$$= E^* \{e^{-2r\Delta t}(S_2 - K)^+ | S_0 = x\}, \text{ by Markov property}$$



美式選擇權評價

- 根據兩期二元數模型圖考慮美式賣權的評價問題。
 - 在節點 $S_1=xu$ 上，若立即履約 (immediate exercise)，選擇權的價值是 $(K-xu)^+$ ；
 - 若繼續等待 (continuation)，選擇權的價值是

$$E^* \{e^{-r\Delta t}(K - S_2)^+ | S_1 = xu\}$$

- 因此 $P_1(S_1 = xu) = \max \{(K - S_1)^+, E^* \{e^{-r\Delta t}(K - S_2)^+ | S_1 = xu\}\}$
- 同理 $P_1(S_1 = xd) = \max \{(K - S_1)^+, E^* \{e^{-r\Delta t}(K - S_2)^+ | S_1 = xd\}\}$
- 加總起來，得到：

$$P_0(S_0 = x) = \max \{(K - S_0)^+, E^* \{e^{-r\Delta t} P_1(S_1) | S_0\}\}$$