

計量財務金融 金融科技

國立清華大學 計量財務金融學系/數學系
韓傳祥 著



CHAPTER 7 波動率指數

Outline

第一節 VIX簡介

第二節 整合波動率的複製

第三節 VIX平方與買賣權的關係

第四節 市場濾波器：VIX編制

第一節 VIX簡介

VIX簡介

- 每當主要的金融指數重挫時，有「恐慌指數」之稱的波動率指數（ Volatility Index, VIX ）便經常出現在一般的媒體上，成為衡量金融環境惡化程度的溫度計。
- 這個恐慌指數如何產生？為什麼人們會如此廣泛的接受並引用它呢？我們將在本節中詳細討論。

第二節 整合波動率的複製

整合波動率的複製

- 首先證明一個有趣的結果：整合波動率(integrated volatility)，
 - 定義為波動率平方在時間 t 及 T 間的平均值，可用動態與靜態交易的方式複製而成，如下所示：

$$\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds = \frac{2}{T-t} \left[\int_t^T \frac{ds_s}{s_s} - \ln \frac{S_T}{S_t} \right]$$

- 動態複製的權重是交易標的價格的倒數 $1/S_s$
- 靜態複製是賣出一對數報酬

證明(1/2)

- 假設標的資產服從一個連續的擴散過程

$$dS_t / S_t = \mu dt + \sigma_t dW_t$$

- 將價格取自然對數後得到

$$d\ln S_t = (\mu - \sigma^2 / 2) dt + \sigma_t dW_t$$

- 右項中的 $-\sigma_t^2 / 2$ 來自於**Ito formula**的修正項。將上述這兩條隨機微分方程相減後，取積分便可得證。

證明(2/2)

- 這個結果表達了整合波動率可以完全用動態的買賣股票，

$$\int_t^T 1 / S_s dS_s$$

- 以及靜態的賣出一個對數式的選擇權契約 $\ln (S_T / S_t)$ 的方式加以複製。

第三節 VIX平方與買賣權的關係

VIX平方與買賣權的關係

- 引理 3.1：固定一履約價 $K > 0$ ，對任一價格 $x > 0$ ，我們可得如下等式

$$-\ln \frac{x}{K} + \frac{x}{K} - 1 = \int_K^\infty (x - k)^+ \frac{dk}{k^2} + \int_0^K (k - x)^+ \frac{dk}{k^2}$$

- 從上述的結果可知，一個對數契約可由一些期貨、買權與賣權的報酬所合成，且權重依序為：

$$\frac{1}{K}, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{k^2}$$

- 大寫的 K 指的是固定的履約價而小寫的 k 則為一變數。

證明(1/2)

- 將引理中等式折現後取條件期望便可得

$$E^{\star} \left[e^{-r(T-t)} \left(-\ln \frac{S_T}{K} + \frac{S_T}{K} - 1 \right) \mid S_t \right] = \int_K^{\infty} C(t, S_t; T, k) \frac{dk}{k^2} + \int_0^K P(t, S_t; T, k) \frac{dk}{k^2}$$

- 將上式中的 $\ln \frac{S_T}{K} = \ln \frac{S_T}{S_t} + \ln \frac{S_t}{K}$ 且

$$\ln \frac{S_T}{K} = \left(r(T-t) - \int_t^T \sigma_s^2 ds \right) + \int_t^T \sigma_s dW_s^{\star}$$

證明(2/2)

- 帶入原式後移項可得：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T-t} E^{\star} \left[\int_t^T \sigma_s^2 ds \mid S_t \right] \\ &= \frac{2}{T-t} \left(r(T-t) + \ln \frac{S_t}{K} - \frac{e^{r(T-t)} S_t}{K} + 1 \right) \quad (3-1) \\ &+ \int_K^{\infty} e^{r(T-t)} C(t, S_t; T, k) \frac{dk}{k^2} + \int_0^K e^{r(T-t)} P(t, S_t; T, k) \frac{dk}{k^2} \end{aligned}$$

第四節 市場濾波器：VIX編製

CBOE VIX公式(1/2)

- 利用泰勒展開項逼近式(3-1)中的

$$r(T-t) + \ln \frac{S_t}{K} - \frac{e^{r(T-t)} S_t}{K} + 1 \approx -\frac{1}{2} \times \left(\frac{F_t}{K} - 1 \right)^2$$

- 以有限的黎曼和來逼近式 (3-1) 中的積分如下，並且將式 (3-1) 中的左項記為：

$$\sigma_2 \equiv \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (4-1)$$

CBOE VIX公式(2/2)

- 使用 30 天（日曆日）前後兩個到期日的選擇權價格，進行適當的權重後，再以下述的內外差分法，估算30 天期的未來整合波動率（future integrated volatility）的期望值的方根：

$$VIX = 100 \times$$

$$\sqrt{\left\{ T_1 \sigma_1^2 \left[\frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right] + T_2 \sigma_2^2 \left[\frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right] \right\} \times \frac{N_{360}}{N_{30}}} \quad (4-2)$$

- 式（4-2）中VIX的定義與波動率的模型完全無關，並且可被避險複製，因此具強韌性。另外由於VIX可視為未來市場景氣的指標，在金融實務上善用VIX作為歷史資料模擬的情境測試（scenario test）與壓力測試（stress test），乃不失為一簡便的辦法。

VIX的使用(1/4)

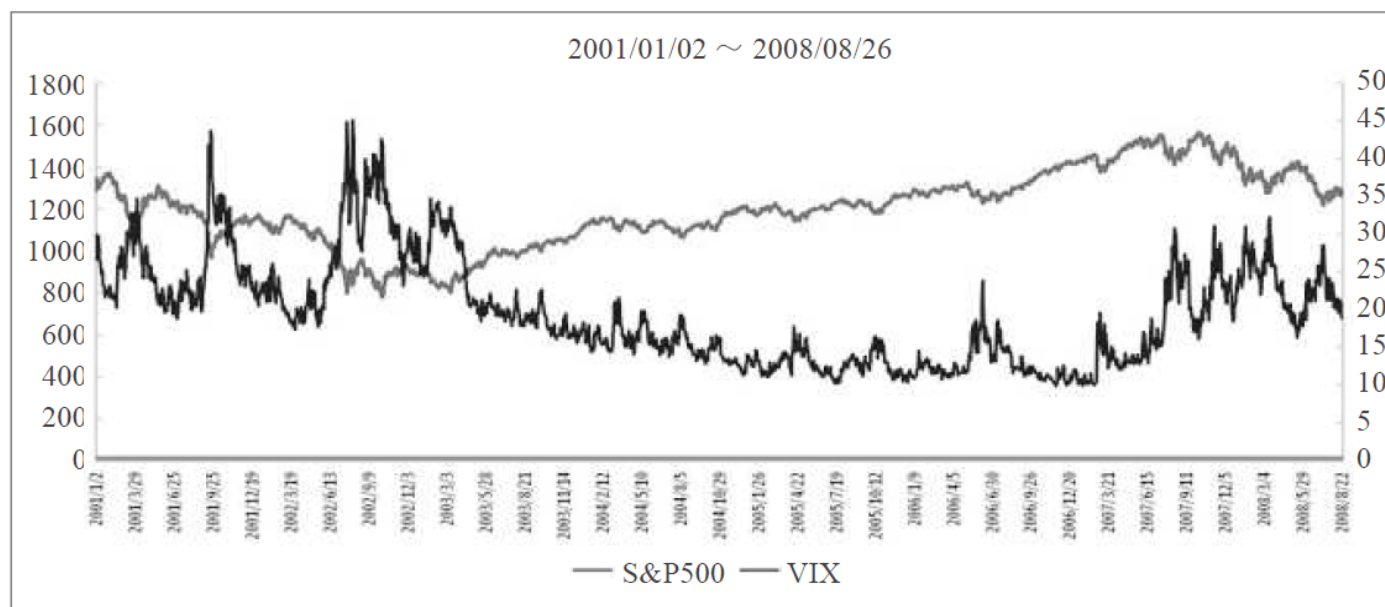


圖 4-1 美國 S&P500 與波動率指數 (VIX) 的比較

- VIX 與其標的 S&P 500 指數的關係，二者呈現了強烈的負相關，也就是金融上所謂的**槓桿效應(leverage effect)**。樣本期間中 S&P 500 指數與 VIX 的相關係數高達 -0.75。

VIX的使用(2/4)

- 現在由 VIX 波動率指數，可立即、明確的反映出選擇權市場參與者對於大盤後勢波動程度的看法，這對風險管理當然有重要的影響。由於與 SPX 強烈的負相關性，VIX 自然地成為一合適的避險工具。
- 從「資訊內涵(information content)」的觀點，將 VIX 跟歷史波動率相較，具有鮮明的對比。
- VIX具有「前向資訊(forward information)」；
- 歷史波動率，則具有「後向訊息(backward information)」。

VIX的使用(3/4)

- 另外從 VIX 的表現來觀察，不難看出 VIX 是一個領先的指標。

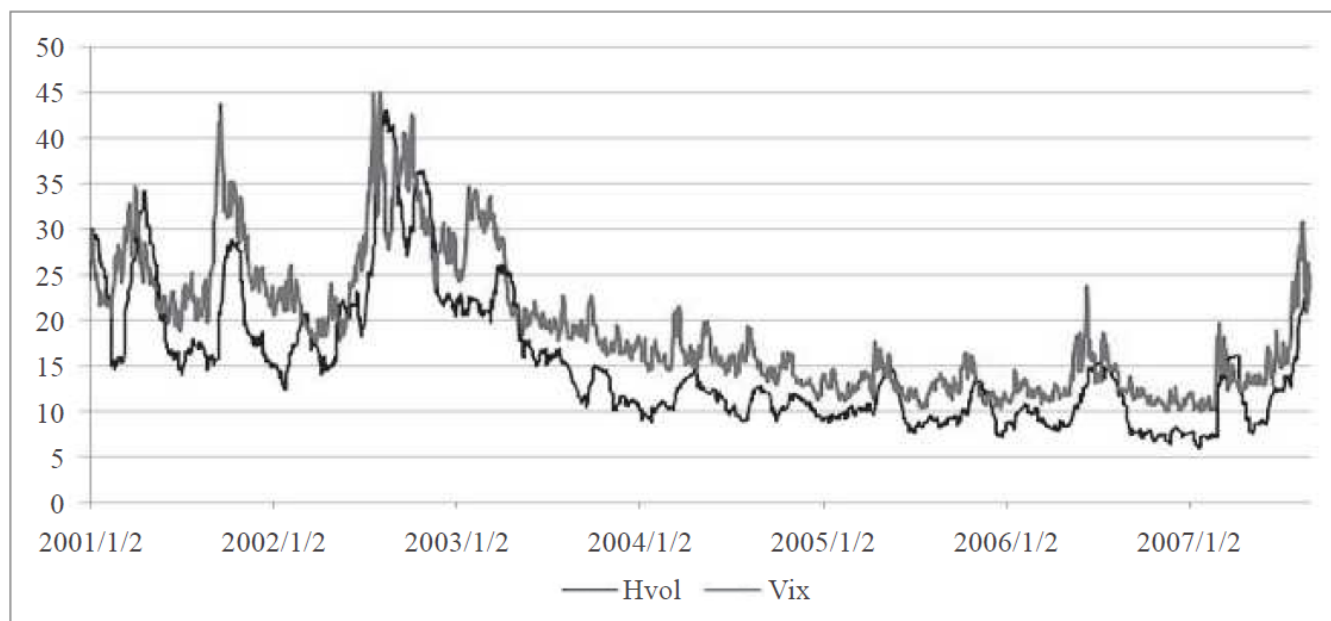


圖 4-2 美國 30 天期歷史波動率與波動率指數（VIX）的比較

VIX的使用(4/4)

- 關於波動率的估計至今並沒有公認的最佳方法，然而 VIX 的實用性就像是一個市場上的濾波器，它不倚賴於任何特別的隨機模型，自成一個簡易的指標來衡量市場風險。
- VIX 的觀念並不困難，而且它的使用非常頻繁，甚至於出現在一般的報導媒體上了。

持續發展

- 就VIX 本身來說，CBOE 發展出期限結構(term structure)來衡量不同期間的波動率，由VXST、VIX、VXV與VXMT 分別代表未來9、30、93與約180 天中 S&P 500 指數的風險大小。
- 在其他股票指數或個股方面，對道瓊工業指數DJX 的VIX，稱作 VXD此外蘋果 AAPL 的VXAPL，都是些新穎的波動率指數。
- 在固定收益市場也出現了波動率指數，例如美國十年期國庫券 (10-year treasury notes) 的 VXTYN。
- 外匯方面，分別有對 Euro，Yen，British pound 的 EUVIX，JYVIX，BPVIX 等波動率指數。
- ETF也有相關的波動率指數。