

計量財務金融 金融科技

國立清華大學 計量財務金融學系/數學系

韓傳祥 著



CHAPTER 8 固定收益

Outline

第一節 利率

第二節 零息債券評價

第三節 遠期利率

第四節 利率選擇權

第五節 TYVIX指數編製

第一節 利率

利率

- 複利

- 設一筆投資金額 A ，投資期間 n 年，每年之投資報酬率 R ，若利率為每年複利 m 次，則此筆投資之終期值為 $A\left(1 + \frac{R}{m}\right)^{mn}$ ，當 $m = 1$ ，此利率即稱「等值年利率」。

- 連續複利

- 當複利次數 m 趨近無窮大，即為「連續複利」。若投資金額為 A ，期間為 n 年，利率為 R ，則於連續複利下此投資之終期值為 Ae^{Rn} 。

- 零息利率

- 所謂 n 年零息利率，係指一種自現在開始，一直持續 n 年之久的投資報酬率，且投資之利息與本金只在 n 年到期時一次給付，期間並無支付任何現金。 n 年零息利率亦可稱作 n 年即期利率。

利率類型(1/2)

- 公債利率
 - 「公債利率」係指投資人購買短期國庫券及長期政府公債時所賺得之報酬率。國庫券及政府公債為一國政府以該國貨幣舉債時所發行之金融工具。因此公債利率可謂為一種無風險之利率。
- LIBOR利率
 - LIBOR 為倫敦銀行間放款利率的簡稱，特定銀行願將大額資金於該利率水準下轉存至其他銀行。LIBOR 利率並無法完全免除信用風險，但現實中公債利率偏低，故衍生性證券之交易者常改以LIBOR作為無風險利率。

利率類型(2/2)

- 重新購買利率（附買回利率）
 - 市場投資者於交易進行時，有時會以重新購買協議的方式籌措所需資金，擁有證券方將其所持有之證券以特定價格售予該公司，並約定日後以另一較高之特定價格買回這些證券。
 - 實際上，該公司已提供該投資自營商一筆貸款，而證券之買賣價差即為該公司所賺得之利息，以此計算之出利率即為「附買回利率(repo rate)」。

第二節 零息債券評價

債券評價

- 零息債券是債券市場中的基本元素。現以 $B(0,T)$ 記為債券價格，該契約的到期日為 T ，面額1元，且在到期前不支付任何利息。
- 固定在日期 $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ 支付固定利息 $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ ，其中最後一期支付利息並本金 c_n ，的債券價格 $CB(0, T_n)$ 可有如下分解：

$$CB(0, T_n) = \sum_{i=1}^n c_i B(0, t_i)$$

- 也就是說，一個支付利息的債券可以由許多零息債券組合起來。

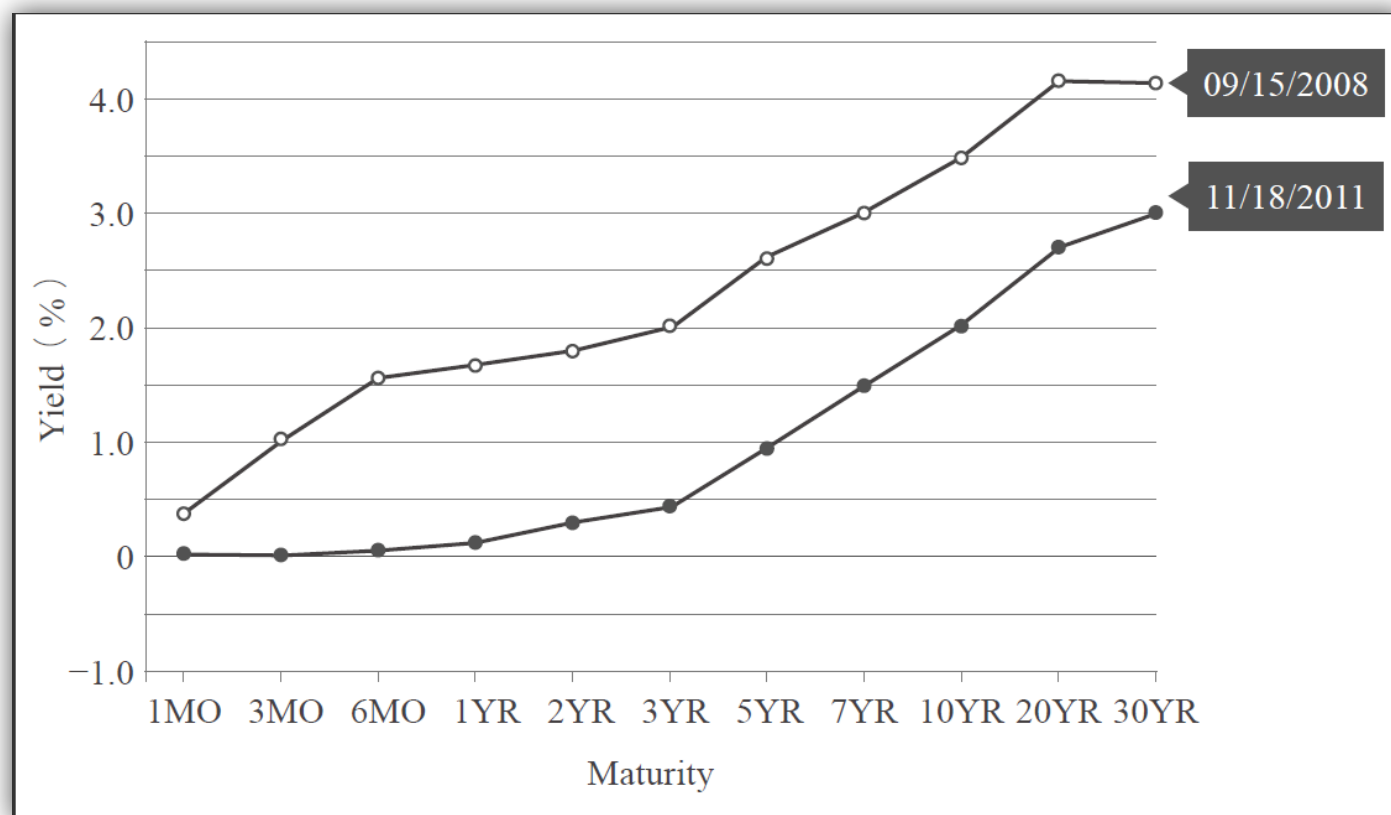
殖利率曲線(1/2)

- 殖利率(yield)也稱作 zero rate，在債券市場中被慣用來描述零息債券的價格，它的定義是：

$$yield(T) = -\frac{\ln B(0, T)}{T}$$

- 相當於是該零息債券所對應的固定利率，使得 $B(0, T) = \exp(-yield(T) \times T)$ 。
- 由不同到期日 T 所對應的殖利率，形成一個期限結構，稱之殖利率曲線。

殖利率曲線(2/2)



美國公債殖利率曲線

存續期間Duration(1/3)

- 存續期間
 - 債券收到帳款的平均時間。以下的推導可以得出存續期間跟債券對數值的微分有關。令 y 代表利率，債券價格是

$$B(y) = \sum_{i=1}^n c_i e^{-y T_i}$$

- $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ 代表帳款收到日期， $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 代表在相對的日期收到的帳款。

存續期間Duration(2/3)

- 計算債券價格 $B(y)$ 對利率 y 的微分

$$\begin{aligned}\frac{dB(y)}{dy} &= - \sum_{i=1}^n T_i c_i e^{-y T_i} \\ &= - B(y) \sum_{i=1}^n T_i \frac{c_i e^{-y T_i}}{B(y)}\end{aligned}\quad (1.1)$$

存續期間Duration(3/3)

- 存續期間即定義為 $D(y) = \sum_{i=1}^n T_i \frac{cie^{-yT_i}}{B(y)}$
 - 將每筆折現後帳款 cie^{-yT_i} 對債券價格 $B(y)$ 的占比，乘上收到該筆帳款的時間 T_i ，加總後所得到收到帳款時間的一種平均值。
- 將式(1.1)等除以債券價格 $B(y)$ ，可得 $\frac{dB(y)}{B(y) dy} = -D(y)$
- 因微分連鎖率，故推導出：對數債券價格對利率的微分，等於存續期間的負值。
- 實務上，當利率有小變動時，相對債券價格的標準變化率，約等於存續期間的負值：

$$\frac{\Delta B(y)}{B(y)\Delta y} \approx -D(y)$$

修正後存續期間Modified Duration(1/2)

- 上述關於存續期間的定義，是基於年利率 y 以連續複利計算。若僅以多期的複利計算，則應加以修正如下：

$$D^* = \frac{D}{1 + \frac{y}{m}}$$

- 其中 m 是一年當中的期數。

修正後存續期間Modified Duration(1/2)

- 存續避險比例(duration-based hedge ratio)是根據利率變化決定避險比例。假設 P 與 F 分別代表了投資組合與利率期貨的價格，且

$$\frac{dP(y)}{dy} = -P(y)D_P(y) \quad \text{與} \quad \frac{dF(y)}{dy} = -F(y)D_F(y)$$

分別代表它們對利率變動的敏感度。

- 因此，可以用
$$N^* = \frac{P(y)D_P(y)}{F(y)D_F(y)}$$

作為利率避險的單位數，使得總價值不受利率小變動的影響。

- 因此，總投資組合 $P(y) - N^*F(y)$ 是 ρ -風險中立(ρ -neutral)

凸性Convexity(1/2)

- 在第五章第五節中，希臘字母 Delta 與 Gamma 分別是衡量標的資產價格的小變動與大變動對於衍生品價格的變化量。
- 在利率市場中，利率的小變動對債券投資組合價格的變化量由存續期間 Duration 的負值來描述；而利率的大變動對債券投資組合價格的變化量則由凸性 Convexity 來描述：

$$C = \frac{1}{B} \frac{dB(y)}{dy} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i t_i^2 e^{-yt_i}}{B}$$

凸性Convexity(1/2)

- 因此，對債券投資組合價格 $B(y)$ 做泰勒二次展開

$$\Delta B(y) = \frac{dB(y)}{dy} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{d^2 B}{dy^2} \Delta y^2$$

- 分別帶入Duration與Convexity的定義後可得

$$\frac{\Delta B(y)}{B(y)} = -D\Delta y + \frac{1}{2} C\Delta y^2$$

第三節 遠期利率

遠期利率

- 遠期利率是以站在某一時點的立場，計算未來一段時間內的利率。遠期利率通常可以由殖利率曲線(yield curve)求得，公式如下：

$$R_F = \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{T_2 - T_1}$$

- 這個關係可以由零息債券價格求得

$$e^{-R_1 T_1} \times e^{-R_F (T_2 - T_1)} = e^{-R_2 T_2}$$

遠期利率協議FRA(1/2)

- 此契約可以理解為一種在遠期時的交換契約。以符號表示。若公司X願意貸款給公司Y，從未來的 $T1$ 到 $T2$ 時間，假設：
 - RK ：FRA 中同意的利率。
 - RM ：在時間 $T1$ 實際觀察到，在 $T1$ 到 $T2$ 時期中的 LIBOR。
 - L ：契約名目本金

遠期利率協議FRA(2/2)

- 公司X在 T_2 時間的現金流為 $L \times (R_K - R_M) \times (T_2 - T_1)$

且在 T_1 時的價值為

$$\frac{L \times (R_K - R_M) \times (T_2 - T_1)}{1 + R_M (T_2 - T_1)}$$

- 相反地，公司Y在 T_2 時間的現金流為 $L \times (R_M - R_K) \times (T_2 - T_1)$

且在 T_1 時的價值為

$$\frac{L \times (R_M - R_K) \times (T_2 - T_1)}{1 + R_M (T_2 - T_1)}$$

第四節 利率選擇權

交易所的利率選擇權

- 國庫債券期貨選擇權(treasury bond futures option)
 - 使投資人在未來一個時點得以交易國庫債券期貨。
 - 一口的國庫債券期貨是以十萬美元為名日本金，其選擇權是以這十萬美元的百分比作為報價，百分比的最小單位是1%的六十四分之一。
- 歐洲美元期貨選擇權在 CME(Chicago Mercantile Exchange)交易，當歐洲美元期貨的價格有1bp的改變時，就會帶來\$25的損益。
- 債券期貨的歐式買權價值可參考Black's Formula。

OTC利率選擇權

- 以下分別介紹在店頭市場中，普遍被交易的歐式債券選擇權、利率上下限，與歐式交換選擇權。

歐式債券選擇權(1/2)

- 歐式債券選擇權
 - 提供投資人一個權利、而非義務，在未來一個時點以特定價格交易債券。
- 在評價歐式債券選擇權時，也需要債券價格的波動率，波動率可以理解為一資產價格變動率的標準差。利用存續時間，可得：

$$\frac{\Delta B}{B} \approx -D \Delta y_F \qquad \frac{\Delta B}{B} \approx -D y_F \frac{\Delta y_F}{y_F}$$

- 透過上式可觀察到，殖利率波動率 σ_y 與債券價格波動率 σ 的關係為：

$$\sigma = D y_0 \sigma_y$$

- y_0 是殖利率 y_F 的起始值。

歐式債券選擇權(2/2)

- 歐式債券選擇權定價公式：

- 債券到遠期的時間 T ，可能會支息 I ，假設債券價值記為 B ，無風險利率為 r ，則支息的遠期契約價值 $F_0 = (B - I)e^{rT}$

- 定價公式為

$$c = e^{-rT} \left[F_0 N(d_1) - KN(d_2) \right]$$
$$p = e^{-rT} \left[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1) \right]$$

- 其中：

$$d_1 = \frac{\ln(F_0 / K) + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{\ln(F_0 / K) - \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

利率上下限(1/2)

- 利率上限(interest rate caps)
 - 當投資機構在根據浮動利率如LIBOR 支息時，因擔心未來利率上揚，加重利息負擔，而以一個保證的上限利率(cap rate)，作為風險控管之用。
- 縱使一個利率上限衍生品的票期很長，但它的評價總是可以拆解成許多單期的利率上限總和。每個單期的利率上限稱為小利率上限(interest rate caplet)。也就是說，利率上限衍生品是每期小利率上限的投資組合。

利率上下限(2/2)

- L 代表名目本金， R_K 代表上限利率， $\{t_1, t_2 \dots t_n\}$ 代表票期的重設日；
- δ_k 代表第 k 票期的時間長度， R_k 代表第 k 票期間的 LIBOR 利率

$$L \delta_k e^{-r_{k+1} t_{k+1}} \left[F_k N(d_1) - R_K N(d_2) \right]$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_k / R_K) + \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_k / R_K) - \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

歐式交換選擇權(1/2)

- 歐式交換選擇權
 - 常來作為企業或投資機構，控制未來的借貸成本之用。
- 先考慮一紙T年後才開始的交換契約，以付出固定的利率 R_K ，換得LIBOR利率，持續n年，每年交換m期，名目本金為L。交換選擇權的期末報酬是由一系列的現金流量構成：

$$\frac{L}{m} \max\{R - R_K, 0\}$$

歐式交換選擇權(1/2)

- 歐式交換選擇權的價值為

$$\frac{L}{m} e^{-r_i t_i} \left[F_0 N(d_1) - R_K N(d_2) \right]$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(F_0 / R_K) + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{\ln(F_0 / R_K) - \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

- F_0 是遠期交換利率， r_i 是在到期 t_i 前的零息利率， σ 是遠期交換利率的波動率。整個歐式交換選擇權的總價值是：

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} e^{-r_i t_i} \left(F_0 N(d_1) - R_K N(d_2) \right)$$

第五節 TYVIX 指數編製

TYVIX 指數編製(1/2)

- 在債券選擇權市場中的一種波動率指數 VXTYN，乃是根據美國十年期國庫券期貨的選擇權所編製而出；因而，此指數可以作為總體經濟或是貨幣政策的風險指標。

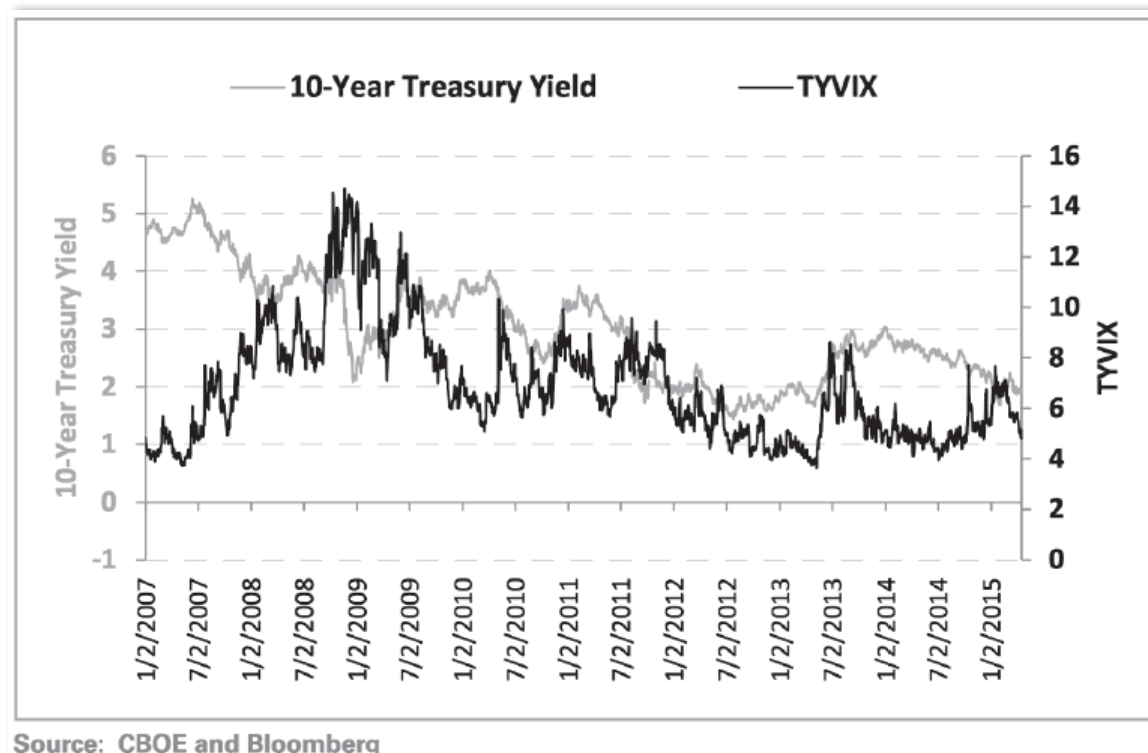
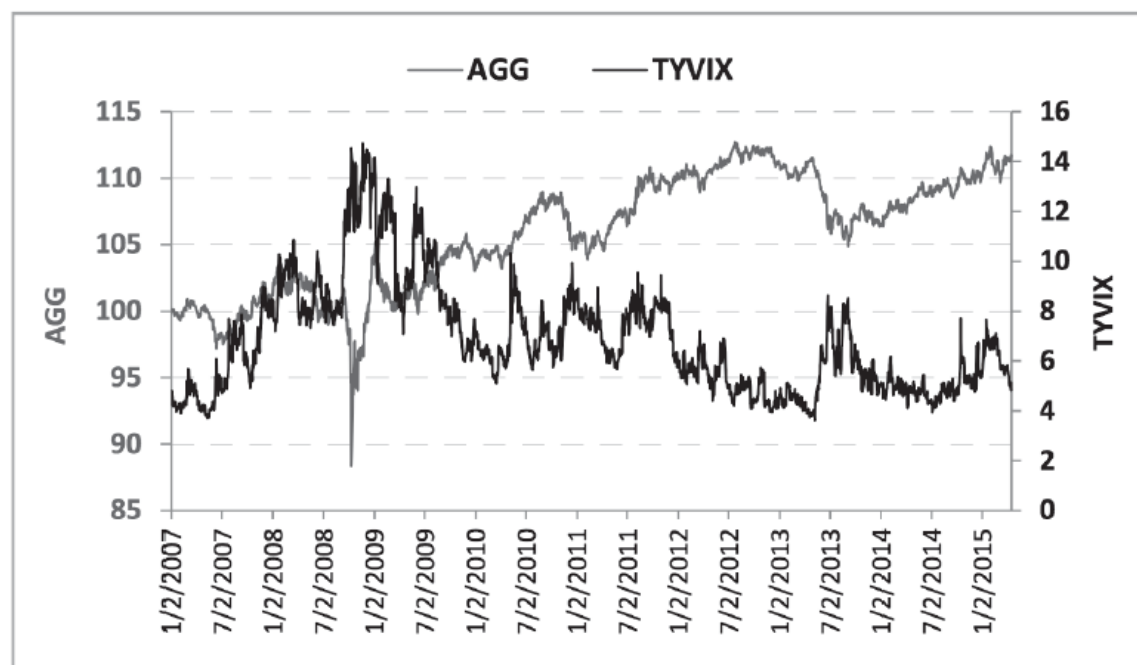


圖5.1 從 2007 一月 到 2015 四月間，美國十年期國庫券 (10-Year Treasury Note) 與波動率指數 TYVIX 的比較

TYVIX 指數編製(2/2)



Source: CBOE and Bloomberg

圖5.2 從 2007 一月到 2015 四月間，美國整合型債券 ETF (US Aggregate Bond ETF)與波動率指數 TYVIX 的比較

CBOE 的 TYVIX 公式

- 相對於 VIX 對 S&P 500 指數的定義，殖利波動率(Treasure yield volatility index, TYVIX) 旨在衡量或是預測，美國十年期國庫券期貨價格在未來 30 天的波動風險。將 VIX 的編製推廣到 TYVIX，其程序如下，但詳細的編撰資訊可見 TYVIX 介紹。

$$\text{TYVIX} = 100 \times \sqrt{\frac{365}{30} \text{VAR}} = 100 \times \sqrt{\frac{365}{30} \frac{1}{\tau} \left[2e^{t\tau} \left\{ \sum_{K_i} \frac{\Delta K_i}{K_i^2} \text{Price}_{K_i} + \sum_{K_j} \frac{\Delta K_j}{K_j^2} \text{Price}_{K_j} \right\} - \left(\frac{F}{K_{ATM}} - 1 \right)^2 \right]}$$