Chap 1 Black-Scholes定價理論

韓傳祥

清華大學 計量財務金融學系

布朗運動

- **定義 2.1：** 令隨機過程（$W_t, t \geq 0$）在機率空間（$\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t\geq 0}, \mathcal{P}$）下的路徑是連續的，而且服從對任何 $s > 0$，
  1) $W_0 = 0$ (在時間 0 的位置為 0) ，
  2) $W_{t+s} - W_t \sim \mathcal{N}(0, s)$，
  3) $W_{t+s} - W_t$ 是獨立於 $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ 對於任何 $t_0 = 0 < \cdots < t_n = t$（也就是給定時間上沒有重疊的兩個增量，這些增量會互相獨立），

  滿足以上條件的隨機過程稱為標準布朗運動。

布朗運動的模擬

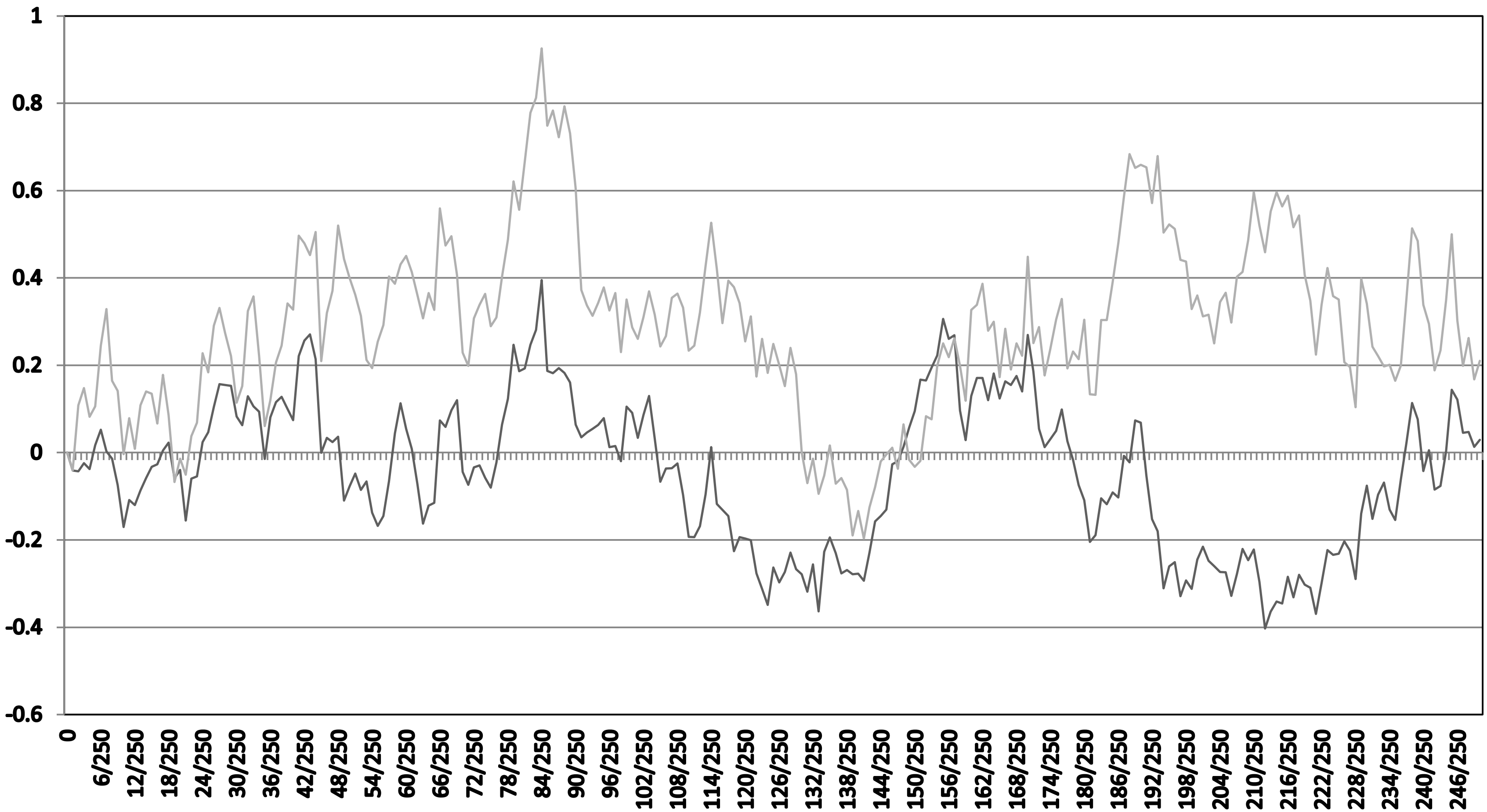
- 在金融模型中，布朗運動常用來模擬報酬率
- **Matlab 程式 2-1**：根據布朗運動的定義模擬出軌跡

  ΔW = randn(1,250).* sqrt(1/250); ％產生1×250 個 $\mathcal{N}(0,1)$ 分佈的樣本並乘上 $\sqrt{1/250}$ [250 個模擬的日報酬]

  ΔW = [0 ΔW]; ％從 0 開始

  $W_{0 \le t \le 1}$ = cumsum(ΔW,2); %累加增量以形成布朗運動軌跡 [一年內的累積報酬]

布朗運動的軌跡圖



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0
6/250
12/250
18/250
24/250
30/250
36/250
42/250
48/250
54/250
60/250
66/250
72/250
78/250
84/250
90/250
96/250
102/250
108/250
114/250
120/250
126/250
132/250
138/250
144/250
150/250
156/250
162/250
168/250
174/250
180/250
186/250
192/250
198/250
204/250
210/250
216/250
222/250
228/250
234/250
240/250
246/250

布朗運動的隨機性質

定理 2.2：

1) Martingale 性質: 布朗運動是一個 martingale。
2) 布朗運動 $W_{t\geq 0}$ 是一個馬可夫過程 (Markov process)。
3) 布朗運動的 Levy’s 刻畫： 隨機過程 (W_t) 是一個標準布朗運動若且唯若條件特徵函數 (conditional characteristic function) 為

$$E\left\{e^{iu(W_t-W_s)}|\mathcal{F}_s\right\} = e^{-\frac{u^2(t-s)}{2}}\text{。}$$

4) 對任何常數 σ， $Z_t = exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2)$ 是 martingale。Z_t 稱為指數平賭 (exponential martingale)。

函數的變分

定義2.3： 變分(variation). 在定義域 [0,T] 上，時間上的切割為$\Pi = \{t_0 = 0, t_1, \cdots, t_n = T\}$且 $\|\Pi\| = max_{i=0,\cdots,n-1}(t_{j+1} - t_j)$。

1) (一次)全變分 ((first-order) total variation): 函數 f 的全變分，記為 $TV_T(f)$ ，的定義是

$$TV_T(f) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left| f(t_{j+1}) - f(t_j) \right| ,$$

2) 二次變分 (quadratic Variation): 函數 f 的二次變分，記為 $\langle f, f \rangle_T$ ，的定義是

$$\langle f, f \rangle_T = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left[f(t_{j+1}) - f(t_j) \right]^2$$

3) 交叉變分 (cross variation): 函數 f 與 g 的交叉變分，記為 $\langle f, g \rangle_T$ ，的定義是

$$\langle f, g \rangle_T = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left[f(t_{j+1}) - f(t_j) \right] \left[g(t_{j+1}) - g(t_j) \right]$$

連續可微函數

- 若函數 f 是一次連續可微函數，記做 $f \in C^1([0,T])$，則

  1) $TV_T(f) = \int_0^T |f'(t)|\, dt$ 。

  2) $\langle f, f \rangle_T = 0$。

布朗運動不是有限變分

定理 2.3：給定了 T 之後，布朗運動 $W_{t\geq 0}$ 的變分如下：

1) 一次變分為 $TV_T(W) = \infty$。
2) 二次變分為 $\langle W, W \rangle_T = T$ a.s.。
3) 交叉變分為 $\langle W, T \rangle_T = \langle W, \widetilde{W} \rangle_T = 0$，其中 W 與 $\widetilde{W}$ 是互為獨立的布朗運動。

布朗運動的特色

1) 布朗運動的軌跡並非是平滑的 (smooth)。
2) 布朗運動的軌跡雖是連續的，但是幾乎處處不可微分。
3) $dW_t \cdot dW_t = dt, dW_t \cdot dt = 0, dW_t \cdot d\widetilde{W}_t = 0$。

   將上式的結果從時間 0 到 T 積分則分別表示為 $\langle W, W \rangle_T = T$ 與 $\langle W, t \rangle_T = \langle W, \widetilde{W} \rangle_T = 0$。

幾何布朗運動
(geometric Brownian motion, GBM)

- 在金融模型中，幾何布朗運動，亦稱為 log normal 過程，是一個隨機過程常用來模擬股價的動態行為。它服從以下結構：

$$S_t = S_0 exp\{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t\}$$

也稱作 Black-Scholes 模型，其中 S_0 記為時間 0 的股價， $W_{t\geq 0}$ 記為布朗運動， μ 是報酬率（return rate）或成長率（growth rate）， $\sigma > 0$ 是波動率（volatility）。

應用布朗運動的二次變分
－估計波動率

- 對每個分割 $\{0 = t_0, t_1, \cdots, t_n = T\}$，我們可以定義對數報酬 (log return) 如下

$$log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}} = \sigma \left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \right) + (\mu - \sigma^2/2)\left(t_{j+1} - t_j\right)$$

- 實現變異 (realized variance, RV) 的定義為 log 報酬率平方的均值：

$$\frac{1}{T} \sum_{j=0}^{n-1} \left(log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}} \right)^2$$

- 實現變異會收斂到整合變異 (integrated variance) $\frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2 \, dt = \sigma^2$

隨機積分的財務解釋

令給定的$\Pi = \{t_0 = 0, t_1, \cdots, t_n = T\}$為固定的交易日期，$\Delta_t$為一些事前給定的交易策略，那麼 I_t，$t_{k-1} < t \leq t_k$，為從離散的交易策略 Δ 所累積的增益過程 (gain process) 或稱為財富過程 (wealth process)

$$I_t = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_{t_j}\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right) + \Delta_{t_k}\left(W_t - W_{t_k}\right) = \int_0^t \Delta_u dW_u$$

隨機積分的性質

定理 ：令 Δ_t，$0 \le t \le T$，是一個適應性的過程，而且滿足下列的積分條件

$$E\left\{\int_0^T \varDelta_t^2\, dt\right\} < \infty$$

則 $I_t = \int_0^t \varDelta_u dW_u$ 具有下列的性質

1) (連續性) $I_t(\omega)$ 對每一個 $\omega \in \varOmega$ 幾乎是處處連續。
2) (適應性) 對每一個時間 t，I_t 都是 $\mathcal{F}_t$ $-$measurable。也就是 I_t 對 $\mathcal{F}_t$ 是適應的。
3) (線性) 如果 $I_t = \int_0^t \varDelta_u dW_u$ 且 $J_t = \int_0^t \Gamma_u dW_u$，則
$$\alpha I_t + J_t = \int_0^t (\alpha \varDelta_u + \varGamma_u) dW_u$$
4) (Martingale) I_t 是一個 martingale。
5) (Ito Isometry) $E\{I_t^2\} = E\left\{\int_0^t \Delta_u^2 du\right\}$
6) (Quadratic Variation) $\langle I, I\rangle_t = \int_0^t \Delta_u^2 du$

布朗運動的伊藤公式

定理：若$f(t,x)\in C^{1,2}$，也就是f函數對時間t是一次可微連續，對狀態x是二次可微連續，而且W_t是一維的布朗運動，則

$$f(T,W_T)=f(0,W_0)+\int_0^T f_t(t,W_t)dt+\int_0^T f_x(t,W_t)dW_t+\frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,W_t)\,dt$$

或者以微分的形式寫出來

$$df(t,W_t)=f_t(t,W_t)dt+f_x(t,W_t)dW_t+\frac{1}{2}f_{xx}(t,W_t)dt$$

備註：注意到最後一項$\frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,W_t)dt$或是$\frac{1}{2}f_{xx}(t,W_t)dt$稱為修正項 (correction term)。

證明描述

在期間 [0, T] 中給定一分割（partition） $\Pi = \{t_0 = 0, t_1, \cdots t_n = T\}$ 後，利用 Taylor 展開可得到下面的結果：

$$
\begin{aligned}
f(T, W_T) - f(0, W_0) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left(t_{i+1}, W_{t_{i+1}}\right) - f\left(t_i, W_{t_i}\right) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} f_t\left(t_i, W_{t_i}\right)(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f_x\left(t_i, W_{t_i}\right)\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f_{xx}\left(t_i, W_{t_i}\right)\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} f_{tx}\left(t_i, W_{t_i}\right)(t_{i+1} - t_i)\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f_{tt}\left(t_i, W_{t_i}\right)(t_{i+1} - t_i)^2 + H.O.T(high\ order\ terms\text{；高次項})\text{。}
\end{aligned}
$$

利用定理2.5，可知道在最後等式中的前三項有非 0 的收斂。事實上其餘項包括所有 H.O.T皆為收斂到 0。

$\int_0^T W_t d\,W_t$ 的解

若令 $\mathrm{f}(x) = x^2$，則由定理的微分型式可輕易看出

$$\mathrm{d}W_t^2 = 2W_t dW_t + \frac{1}{2}dt。$$

也就是 $\int_0^T W_t d\,W_t = (W_T^2 - T)/2$，其中 $-\frac{T}{2}$ 為修正項，而非使用傳統微積分所猜測的結果　$W_T^2/2$ 。

伊藤過程 (Ito Process)

- 定義如下

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Theta_u du + \int_0^t \Delta_u dW_u$$

- 中間項 $\int_0^t \Theta_u du$ 稱作漂移項 (drift term)，最後一項 $\int_0^t \Delta_u dW_u$ 由於是一個隨機積分，它具有 martingale 的性質，因此通常也稱之為 martingale 項 (martingale term)。整個由 Θ 以及 Δ 所定義出來的伊藤過程 X_t 通常也叫做一個連續半鞅的隨機過程 (continuous semi-martingale process)。

微分形式 (differential form)

$$dX_t = \Theta_t dt + \Delta_t dW_t$$

- X_t 若由一個隨機微分方程 (stochastic differential equation, SDE) 來定義，它仍與原來積分的定義是等價的。
- SDE 的解具有馬可夫性質 (Markov property) 。

Quadratic Variation

- 引理 **3.4：(Quadratic Variation)**

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t \Delta_u^2 du$$

- 透過微分的形式，我們可以將 X_t 的過程描述如下：

$$dX_t = \Theta_t dt + \Delta_t dW_t$$

它的交叉變分是定義為 $dX_t \cdot dX_t = \Delta_t^2 dt$。

伊藤過程的伊藤公式

定理： 若 $f(t,x)\in C^{1,2}$ 也就是函數 f 對時間 t 是一次可微連續，對狀態 x 是二次可微連續，而且 $dX_t=\Theta_t dt+\Delta_t dW_t$，則

$$f(T,X_T)=f(0,X_0)+\int_0^T f_t(t,X_t)dt+\int_0^T f_x(t,X_t)dX_t+\frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,X_t)\,d\langle X,X\rangle_t$$

或者

$$df(t,X_t)=f_t(t,X_t)dt+f_x(t,X_t)dX_t+\frac{1}{2}f_{xx}(t,X_t)d\langle X,X\rangle_t$$

運算表

- 令W_{1t}和W_{2t}都是獨立的布朗運動

$\cdot$	$\Theta_t dt$	$\Delta_{1\mathrm{t}} dW_{1t}$	$\Delta_{2t} dW_{2t}$
$\Theta_t dt$	0	0	**0**
$\Delta_{1\mathrm{t}} dW_{1t}$	0	$\Delta_{1t}^2 dt$	**0**
$\Delta_{2t} dW_{2t}$	**0**	**0**	$\Delta_{2t}^2 dt$

伊藤乘積法則

定理：(二維的伊藤公式，或稱之為伊藤乘積法則)

$$\mathrm{d}(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t \cdot dY_t$$。

高斯過程 (Gaussian process)

- r_t 是一個高斯過程的定義是，將任一組離散的時間 $t_1, t_{2,\dots,}t_n$ 所對應的隨機向量 $r_{t_1}, r_{t_2}, \cdots, r_{t_n}$，它們的聯合分配會服從多維的常態分配。
- 例子如下
  1. Ornstein-Ulenbeck process 也稱作 Vasicek process： $dr_t = \alpha(m - r_t)dt + \sigma dW_t$
  2. Ho-Lee model：$dr_t = g(t)dt + \sigma dW_t$

均值回歸過程 (Mean-Reverting Process)

$$dr_t = \alpha(m - r_t)dt + \sigma dW_t$$

則它的解

$$r_t = e^{-\alpha(t-u)}r_u + \alpha\int_u^t e^{-\alpha(t-s)}m\,ds + \int_u^t \sigma e^{-\alpha(t-s)}dW_s$$

是一個高斯過程，而且它的邊界分配可被導出如下

$$\mathcal{N}\left(e^{-\alpha(t-u)}r_u + m\left(1 - e^{-\alpha(t-u)}\right), \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t-u)}\right)\right) \xrightarrow{t\uparrow\infty} \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$$

這個極限分配 (limiting distribution) 稱作 r_t 過程的不變分配 (invariant distribution)。

對數常態過程 (Log-Normal Process)

- 幾何布朗運動

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- 其中起始股價 $S_0 = s$。將 $X_t := \ln S_t$，則利用伊藤公式

$$dX_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t$$

- 這指出了 X_t 是常態分配並服從

$$\mathcal{N}\left(\ln s + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t, \sigma^2 t\right)$$

- 因此 $S_t = e^{X_t}$，所以幾何布朗運動 S_t，也稱作 log-Normal 過程，意為取了對數後仍為常態分配。