第二章、利率與信用衍生性金融商品 (Interest Rate and Credit Derivative Products)

韓傳祥

清華大學 計量財務金融學系

利率模型 (Interest Rate Model)

- 零息債券是債券市場中的基本元素。以 $B(0,\mathrm{T})$ 記為債券價格，該契約的到期日為 T，面額 1 元，且在到期前不支付任何利息。固定在日期 $T_1, T_2, \ldots, T_j$ 支付固定利息 $C_1, C_2, \ldots, C_j$，其中最後一期支付利息併本金 C_j，的債券價格 $CB\left(0, T_j\right)$ 可有如下的分解

$$CB\left(0, T_j\right) = \sum_{k=1}^{j} C_k \ B(0, T_k)$$

- 也就是說，一個支付利息的債券可以由許多零息債券組合出來。

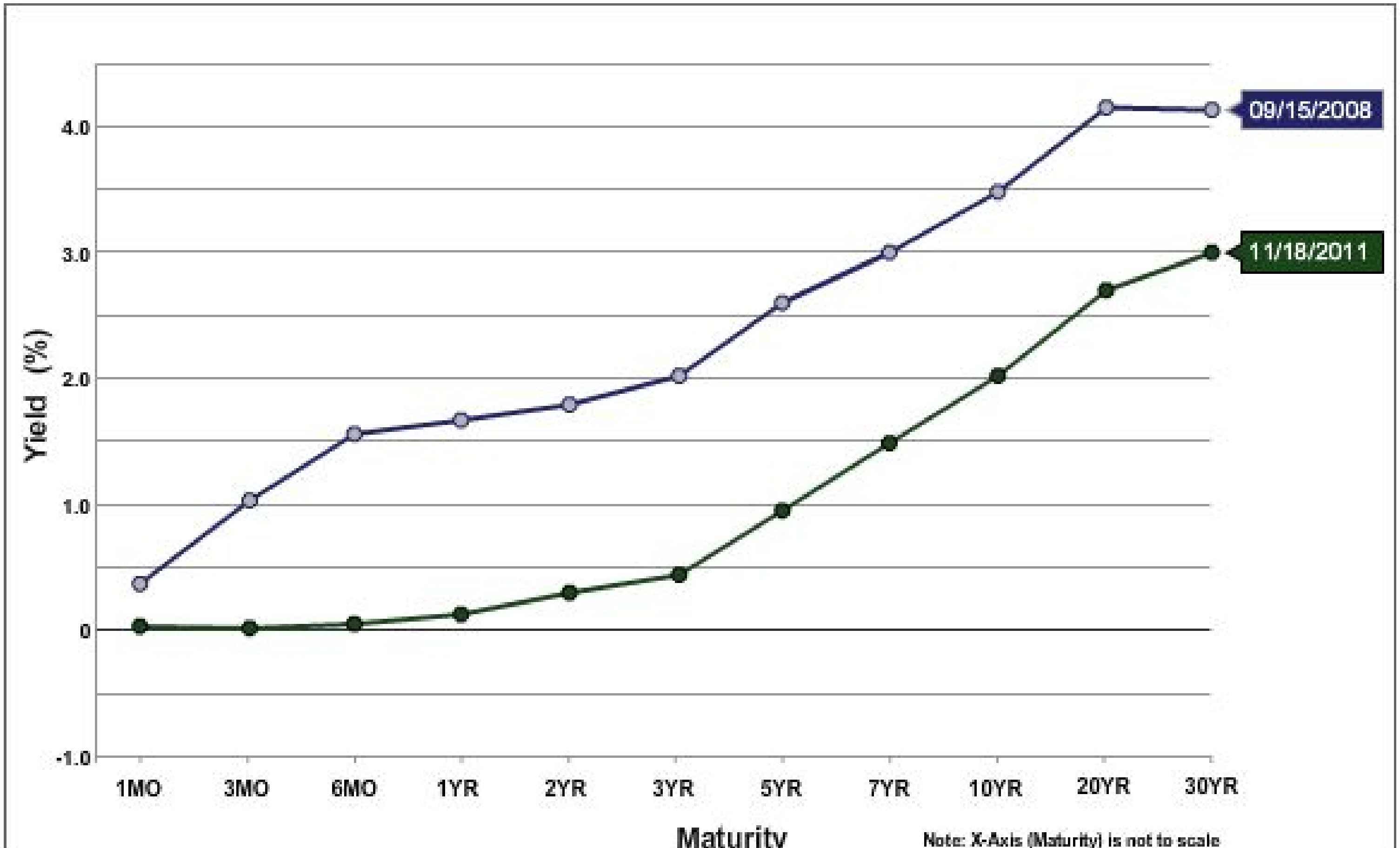
殖利率 (yield)

- 是債券市場中慣用來描述零息債券的價格，它的定義是

$$yield(T) = -\frac{\ln B(0,T)}{T}，$$

- 相當於是該零息債券所對應的固定利率，使得 $B(0,T) = \exp(-yield(T) \times T)$ 。由不同到期日 *T* 所對應的殖利率所形成的一個期限結構 (term structure)，稱之為殖利率曲線 (yield curve)。

美國公債殖利率曲線


09/15/2008
11/18/2011
4.0
3.0
2.0
1.0
0
-1.0
Yield (%)
1MO
3MO
6MO
1YR
2YR
3YR
5YR
7YR
10YR
20YR
30YR
Maturity
Note: X-Axis (Maturity) is not to scale

短期利率模型 (Short Rate Model)

$$B(t,T) = E^* \left[\exp(-\int_t^T r_u \, du) | \mathcal{F}_t \right]$$

- 不難看出，這是將前述的 $yield(T)$ 推廣成一隨機模型。例如假設短期利率 r_t 的動態行為服從一類如下均數迴歸的隨機微分方程，則債券價格具有封閉解。

- Vasicek （或 Ornstein-Uhlenbeck ） 模型:

$$dr_t = \alpha(m - r_t)dt + \beta dW_t^*$$

- CIR （或 square-root ）模型

$$dr_t = \alpha(m - r_t)dt + \beta\sqrt{r_t} dW_t^*$$

仿射函數 (affine function)

上述的隨機模型，債券價格函數則具有仿射 (affine) 的結構，稱為仿射函數 (affine function) $P(t,r) = A(T-t)\exp(-C(T-t)r)$，其中函數 A 與 C 滿足一聯立常微分方程組。

零息債券的評價 PDE

- Vasicek 模型下，PDE 為

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t,r)+\frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(t,r)+\alpha(m-r)\frac{\partial P}{\partial r}(t,r)-rP(t,r)=0$$

- 在 CIR 模型下，PDE 為

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t,r)+\frac{1}{2}\beta^2 r\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(t,r)+\alpha(m-r)\frac{\partial P}{\partial r}(t,r)-rP(t,r)=0$$

- 利用距離至到期日的時間 $\mathrm{\tau = T - t}$ 做變數變換，則零息債券價格函數可表示為 $\mathrm{P(T-\tau, r)} = A(\mathrm{\tau})\exp(-C(\tau)r)$，其中 A(0) = 1且 C(0) = 0

債券選擇權評價 (Bond Option Pricing)

債券選擇權就可視為一複合選擇權 (compound option)，就是一個選擇權定義在另一個選擇權上 (option on option)。

債券選擇權的價格

$$\mathrm{Q(t,x)} := E^*\left[e^{-\int_t^{T_0} r_s ds}\hbar\big(\mathrm{P(T_0, r_{T_0}; T_1)}\big)|r_t = x\right]$$

- 利用 Feymann- Kac 公式可知，函數$\mathrm{Q(t,x)}$會滿足以下方程

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial^2 Q}{\partial \mathrm{x}} + \alpha(m-x)\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{x}} - xQ = 0$$

- 而期末條件為

$$\mathrm{Q(T_0,x)} = \hbar\big(\mathrm{P(T_0, r_{T_0}; T_1)}\big)$$

$$= \hbar\left(e^{-(R(T_1-T_0)-(R-x)C(T-T_0)+\frac{\beta^2}{4\alpha}C(T-T_0)^2}\right)$$

其中$C(T-T_0) = (1-e^{-\alpha(T-T_0)})/\alpha$ 且 $\mathrm{R} = \mathrm{m} - \beta^2/(2\alpha^2)$

Forward/LIBOR Rate 利率模型

- 另一類刻劃債券價格的方式是利用遠期利率 (forward rate)，本文僅討論 Heath-Jarrow-Morton 模型與 LIBOR 模型。

Heath-Jarrow-Morton 模型

- 在時間 *t* 投資未來 *T* 的遠期利率 (forward rate) 為

$$f(t,T\ ) = \ -\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{\log B(t,T+\delta)-\log B(t,T)}{\delta}$$

$$= \ -\frac{\partial}{\partial T}\log B(t,T)$$

- 一個遠期利率 $f(t,T\ )$ 即是在時間 *T* 的瞬間利率，但可以在稍早的時間 *t* 加以鎖定。

- 也就是

$$B(t,T) = \exp(-\int_{t}^{T} f(t,v)\,dv), 0 \leq t \leq T$$

無套利條件 (No Arbitrage Condition)

- 遠期利率在風險中立的機率測度 $\tilde{P}$ 之下，它會滿足

$$df(t,T) = \sigma(t,T)\sigma^*(t,T)dt + \sigma(t,T)d\widetilde{W}_t$$

- 而且零息債券價格會滿足

$$dB(t,T) = R(t)B(t,T)dt - \sigma^*(t,T)B(t,T)d\widetilde{W}_t$$

- 其中在該測度下， $\widetilde{W}_t$ 是布朗運動，並且債券價格的解為

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{D_t}\exp\left\{-\int_0^t \sigma(u,T)d\widetilde{W}_u - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^*(u,T))^2 du\right\}$$

- HJM 模型具有一般性，一因子的 Vasicek，Hull-White，CIR等模型皆是 HJM 的特例。然而，HJM 模型校準的問題甚為複雜使得它的實用性就降低了。

LIBOR 市場模型

- LIBOR 是倫敦同業拆款利率 (London interbank offered rate, LIBOR) 的縮寫。

定義 1.2： 遠期 LIBOR 率 (forward LIBOR rate) $L(t,T)$ 的定義是

$$L(t,T) = \frac{B(t,T) - B(t,T+\delta)}{\delta B(t,T+\delta)}$$

- 金融上的解釋是 “1 + 投資存續期間 (duration of investment) 乘上遠期 LIBOR利率會等於報酬”

$$1 + \delta L(t,T) = \frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}$$

(1 + duration of investment × interest rate = repayment.)

債券選擇權訂價

(Black Caplet Formula) 考慮一上限合約在時間 $T+\delta$ 的報酬為 $(L(T,T)-K)^+$ 其中 K 是非負的履約價，$\delta>0$ 為票期 (tenor)。假設遠期 LIBOR 率 $L(t,T)$ 服從了

$$d\,L(t,T) = \gamma(t,T)L(t,T)d\widetilde{W}_t^{T+\delta}, 0 \le t \le T$$

$\gamma(t,T)$ 假設為不具隨機性的函數。則在時間 0 的一個利率上限合約的價格是

$$B(0,T+\delta)[L(0,T)N(d_+) - KN(d_-)]$$

其中

$$d_\pm = \frac{1}{\sqrt{\int_0^T \gamma^2(t,T)dt}}\left[\log\frac{L(0,T)}{K} \pm \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2(t,T)dt\right]$$

信用風險模型 (Credit Risk Models)

信用事件的定義，以及該事件發生的時間，對信用風險模型的建構來說一直是非常重要的議題。常見的機率模型概分為兩大類: 結構式模型 (structural-form model)，與縮減式模型 (reduced-form model)，它們都屬於由下而上 (bottom up) 的模式。

結構式模型 (Structural Form Model)

Black and Scholes (1973) 與 Merton (1974) 皆以在債務到期日 T 時，若公司資產價值 S_T 低於債務 K 則視為違約；也就是違約事件由集合 $\{\omega\text{: } S_T(\omega) < K\}$ 來定義。顯然，公司或資產的違約事件不應該僅由某邊界日期的價格行為來定義， Black and Cox (1976) 提出了以首達時間 (first passage time) 作為違約時間 τ 的定義；也就是說 $\tau = \inf\{t \geq 0\text{: } S_t = K\}$。因此，資產 S 在時間 T 前違約的事件可定義為 $\{\tau \leq T\} = \left\{\inf_{0 \leq t \leq T} S_t \leq K\right\}$。

違約距離 (Distance to default)

- 在 Black-Scholes 模型下，若一家公司在某 *T* 時間的負債為 *D*，且總資產服從

$$S_T = S_0 e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}Z}\text{，}\quad Z \sim N(0,1)$$

- 則該公司在 *T* 時的違約機率 (probability of default) 是

$$\begin{aligned} \mathrm{DP} &= \mathrm{P}(S_T < D) \\ &= \mathrm{P}\left(Z < \frac{ln\left(\frac{D}{S_0}\right)-\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

- 一般將違約距離 (distance to default) 定義為 $ln(D/S_0)/\sigma$，以利在給定資產負債表時，可以衡量債務到期時間下的違約機率。

縮減式模型 (Reduced Form Model)

- **定義 2.1： (存活函數 (Survival Function))**

  若 $\tau \geq 0$ 是一個個體的違約時間 (default time)，它的機率分配函數為 $F_\tau(t)$，則 $S_\tau(t) = P(\tau > t) = 1 - F_\tau(t)$ 稱為違約時間 τ 的存活函數。

- **定義 2.2： (危險率函數 (Hazard Rate Function))**

  假設違約時間 τ 的機率密度函數是 $f_\tau(t)$，其存活函數為 $S_\tau(t)$ ，則該違約時間危險率函數的定義為:

$$h_\tau(t) = \frac{f_\tau(t)}{S_\tau(t)}$$

違約機率

違約時間的分配函數，可以由危險率決定:

$$F_\tau(t) = P(\tau \leq t) = 1 - exp\left\{-\int_0^t h_\tau(s)ds\right\}$$

隨機違約強度模型

$$P(\tau > T) = E\left\{ e^{-\int_0^T h_s ds} | \mathcal{F}_0 \right\}$$

- 此作法非常類似於利率模型中的零息債券問題。方程式存在一個封閉解，此解稱作一個仿射函數 (affine function)

關聯方法：多資產的聯合分佈
(Copula Method: Joint Distribution of Multi Assets)

- 關聯函數 (Copula Function) 一個 N 維度的關聯函數 C 是一個定義於 I^N，值域為 I 的實值函數，其中 $I = [0,1]$。它滿足:
  1. C(**u**) 對每一個分量 $u_k, k = 1, \cdots, n$，是一個遞增函數，此性質稱作n-increasing。
  2. 對任何一個 $\boldsymbol{u} \in I^N$，若任何一個 $u_k = 0$，則 $C(\boldsymbol{u}) = 0$；若除了 k 以外的 $u_i = 1,\ i \neq k$，則 $C(\boldsymbol{u}) = u_k$。
  3. 對任意 $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$，則一個 n-box 定義為 $\boldsymbol{B} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots [a_n, b_n]$ 會滿足$V_n(\boldsymbol{B}) \geq 0$，其中 V_n 為 n-volume。
- 關聯函數 C 能夠被直覺的理解為一個多變量分配函數，而且它的邊際分佈皆為均勻分布函數。

Sklar定理

- 令 F 是一個 n 維度的多變量分佈函數，其邊際分佈為 $F_1(\cdot), \cdots, F_n(\cdot)$ ，則存在一個 n 維度的關聯函數 C 使得
$$C(F_1(x_1), \cdots, F_n(x_n)) = F(x_1, \cdots x_n)$$
- 此外，若邊際分佈函數 $F_1(\cdot), \cdots, F_n(\cdot)$ 皆是連續的，則 C 為唯一的。

信用風險中的關聯模型

主要有兩類關聯函數，一類是橢圓族 (elliptical class) 關聯函數，另一類為阿基米德族 (Archimedean class)。第一類的橢圓族包括了高斯分配、學生 –t 關聯函數，阿基米德族則通常對高維度的擴展性上，具有很大的效用。

高斯關聯函數

$$C_G^R(u_1, \ldots, u_n) = \Phi^R(\Phi^{-1}(u_1), \ldots, \Phi^{-1}(u_n))$$

- 一個很直接的推廣是將高斯關聯函數改為學生–t關聯函數，後者具有較真實的尾端分佈性質。它沒有如上式的封閉形式。

阿基米德族關聯函數

- 包括了Gumbel、Clayton、Frank、以及一般化 Clayton 關聯函數等。此族主要是由具有連續凸性與嚴格遞減等性質的關聯生成函數 (copula generating function) $\phi(u)$，定義於 [0,1] 與值域在 [0,∞] 的實質函數。此族的關聯函數可以由下面的形式來定義:

$$C(u_1, \ldots, u_n) = \phi^{-1}\left(\phi(u_1) + \cdots + \phi(u_n)\right)$$

生成函數

- Clayton 生成函數是

$$\phi_\theta = \frac{1}{\theta}\left(u^{-\theta} - 1\right)$$

- Gumbel 關聯生成函數定義如下:

$$\phi_\theta(u) = (-\ln u)^\theta, \qquad \theta \in [0, \infty)$$

- Frank 關聯函數如下

$$\phi_\theta(u) = -ln\frac{exp(-\theta u) - 1}{exp(-\theta) - 1}, \theta \neq 0$$

關聯因子模型 (Copula Factor Model)

- 令 τ_i 為每一個資產 I 的違約時間， $F_i(t), 0 \leq t \leq \infty$ 為 τ_i 的累積分佈函數，

$$\tau_i = F_i^{-1}(U_i)$$

- 其中每個 U_i 皆為均勻分布隨機變數

$$U_i = \Phi_i(Z_i)$$

高斯因子關聯函數 (Gaussian factor copula function)

$$Z_i = \rho_i W_0 + \sqrt{1-\rho_i^2} W_i$$

- 其中 W_0 為共同因子，W_i 為邊際因子。而 $W_0, \cdots, W_d$ 皆為一維 i.i.d. 的標準常態隨機變數。

信用衍生品市場: CDS 與 CDO

- 類似保單，對於保護買方 (protection buyer) 來說，他/她必須定期支付一筆保險費用，一直持續到某個信用事件發生或契約終止為止，支付的金額總和稱為「保護端 (protection leg)」；同時，此交換商品的發行人，或稱保護賣方 (protection seller)，將補償買方因為違約所受的損失，這個損失金額稱為「違約端 (default leg)」。評價此商品相當於要計算買方與賣方的公平價格。

假設與符號

- n：交換合約中包含的可違約資產數目。
- T：此契約的到期日。
- R_i：第i個資產的回收率。
- M_i：第i個債務面額
- $\Delta_{j-1,j}$：付款時間區間，市場上的慣例為一季。
- h_i：第i個資產的危險率
- τ_i：第i個資產的違約時間
- B(0, τ)：$exp\left(-\int_0^\tau r(u)du\right)$ 到期日為 τ 的折現因子，其中 $r(\cdot)$ 為無風險利率。

信用衍生性金融商品的公平價格

- 將使保護買方所付的金額與保護賣方所支付的損失補償期望值相同。令 $I(\cdot)$ 為指標函數， 違約端所可能產生的現金流平均值即為：

$$L = E\{(1-R) \times M \times B(0,\tau) \times I(\tau < T)\} \quad (5\text{-}1)$$

- 其中 E 為風險中立測度下的期望值。另一方面，對於保護買方，期望現金流量為：

$$PL = E\left\{\sum_{j=1}^{N} \Delta_{j-1,j} \times M \times prep \times B\left(0, t_j\right) \times I\left(\tau > t_j\right)\right\} \quad (5\text{-}2)$$

- 當 (5-1) 與 (5-2) 相等時，我們可得到公平費率 (premuim，或稱貼水)

CDS 與 CDO

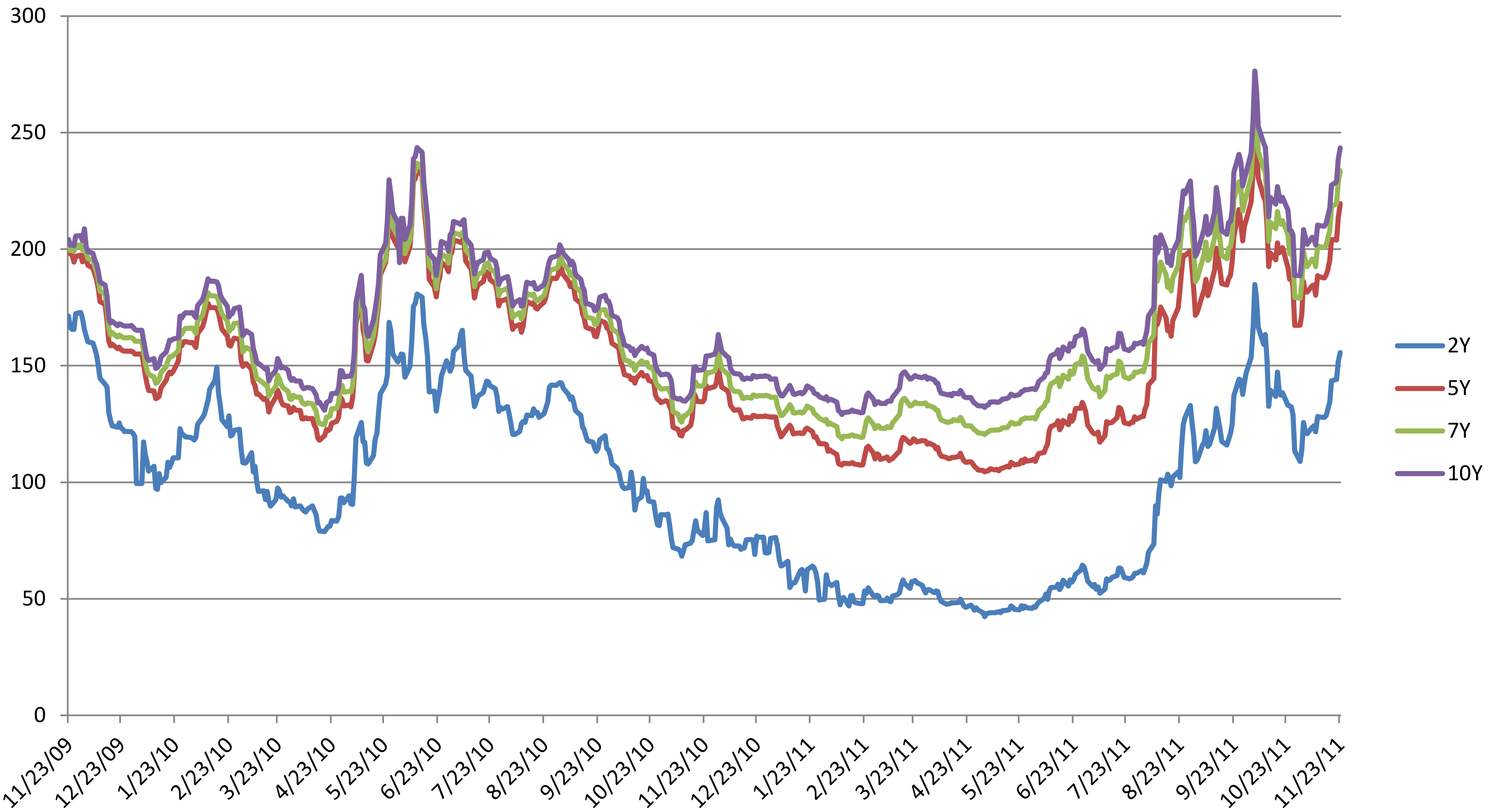
$$prep = \frac{E\{(1-R) \times M \times B(0,\tau) \times I(\tau < T)\}}{\sum_{j=1}^{N} \Delta_{j-1,j} \times M \times B\left(0,t_j\right) \times I\left(\tau > t_j\right)}$$

- 信用違約交換 (Credit Default Swap - CDS) 的訂價問題即是當上式中可違約資產數目 n=1，一般稱為 “單一名字”(single name)。 抵押債務債券或稱為擔保債權憑證 (Collateralized Debt Obligation - CDO) 指的是當上式中可違約資產數目是高維度時，一般也稱為 “多重名字”(multi names)。

信用評等公司 (rating agency)

- 在信用衍生信商品中亦扮演了關鍵的角色。全球最大的信評公司包括了 Standard & Poor（標準普爾），Fitch（惠譽），以及 Moody’s KMV（穆迪 KMV ）。

CDS價格



300
250
200
150
100
50
0
11/23/09
12/23/09
1/23/10
2/23/10
3/23/10
4/23/10
5/23/10
6/23/10
7/23/10
8/23/10
9/23/10
10/23/10
11/23/10
12/23/10
1/23/11
2/23/11
3/23/11
4/23/11
5/23/11
6/23/11
7/23/11
8/23/11
9/23/11
10/23/11
11/23/11
2Y
5Y
7Y
10Y

CDS價格

- 一個簡易用來分析這些 CDS (index) 資料的方法式採用了下述的近似

$$\lambda_t(T) \approx \frac{s_t(T)}{1-R} \text{ ，}$$

- 其中 $s_t(T)$ 是 CDS 在 t 時到期日 T 的費率，R 是回復率 (recovery rate)，而 λ_t 是 t 時的違約強度 (default intensity)。利用此近似很容易估計出 T 年內的違約機率 $DP(T) \approx 1 - exp(-\lambda_t(T) \times T)$。

信評違約機率

- 以標準普爾 BB 等級的債券來說，一年內會違約的機率是 1.1%，五年內會違約的機率是 2.2%，因此二至五年的違約機率是 1.1%。在第一年存活條件下但違約發生在二到五年中的條件機率大約是 $1.1\%/(1-1.1\%) \approx 1.1\%$，這個數值也常用來近似違約強度 $\lambda_t(T) \times T$，$T = 4$。

表 5.1: 平均累積違約率 (Average cumulative default rate) (%)

S&P/Moody s Rating	AAA/Aaa	AA/Aa	A/A	BBB/Baa	BB/Ba	B/B	CCC
S&P Y1	0.0	0.0	0.1	0.2	1.1	4.8	16.4
Moody's Y1	0.0	0.0	0.0	0.2	1.8	8.1	
S&P Y5	0.0	0.1	0.1	0.4	2.2	4.0	7.0
Moody's Y5	0.0	0.1	0.1	0.4	2.0	4.9	

資料來源：www.efalken.com