# Homework #3 Answer

(Due date: 2017/03/16)

1. (40 %)

A piece of ZnSe ($n_2$=2.6) with a thickness of 1 μm is put in air ($n_1$=1). The normal incidence reflectivity is dependent upon the refractive indices of the two media. The reflectivity R can be calculated by Fresnel's equation (FYI: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/reflco.html), which is

$$R=\left(\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right)^2=\left(\frac{2.6-1}{2.6+1}\right)^2=0.197$$

The optical phase difference can be expressed as

$$\delta = n_2 kL=\frac{2\pi n_2 L}{\lambda_0}=\frac{2\pi n_2(2\mathrm{d})}{\lambda_0}$$

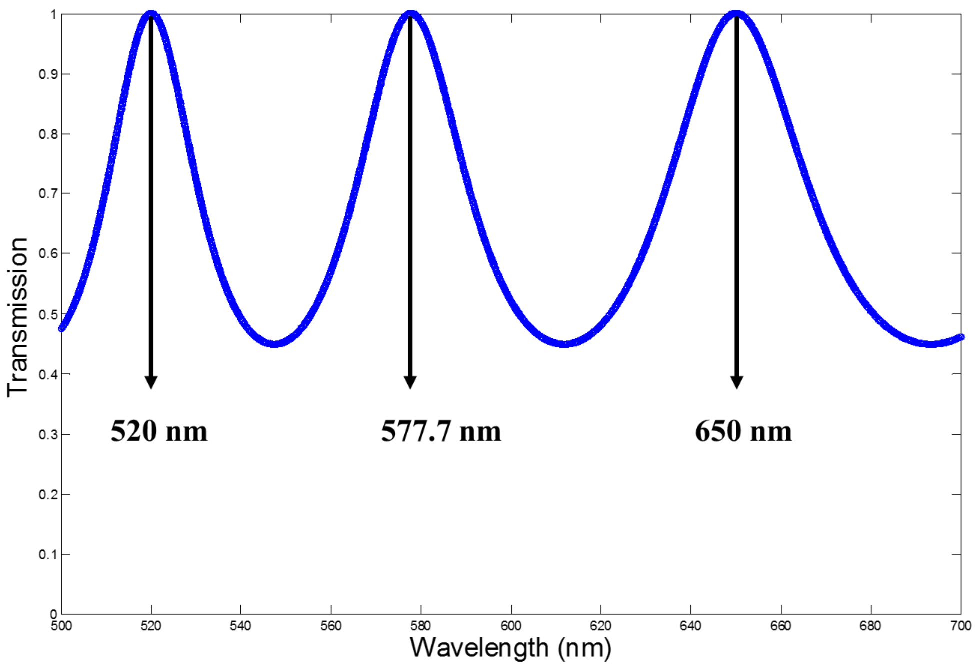
where L is the total round-trip path length, d is the thickness of ZnSe.

The transmission curve becomes

$$T=\frac{1}{1+F\sin^2(\delta/2)}$$

with

$$F=\frac{4R}{(1-\mathrm{R})^2}=\frac{4\times 0.197}{(1-0.197)^2}=1.227$$



2. (20 %)

**思考題 2**

在薄膜多光束干涉中，介面低反射率時觀察反射條紋有利，高反射率時觀察透射條紋有利。我們可以從透射光強度公式進行分析，當薄膜兩側折射率相同時，其透射光強為

$$I_T = I_0 \Big/ \left[1 + \frac{4R\sin^2(\delta/2)}{(1-\mathrm{R})^2}\right]$$

在低反射率時，即 R<<1 時，

$$1 + \frac{4R\sin^2(\delta/2)}{(1-\mathrm{R})^2} \approx 1 - 4R\sin^2(\delta/2) = 1 - 2\mathrm{R}(1-\cos\delta)$$

透射光強變成

$$I_T = I_0\left[1 - 2\mathrm{R}(1-\cos\delta)\right]$$

而反射光強為

$$I_R = I_0 - I_T = 2I_0\mathrm{R}(1-\cos\delta)$$

我們可看出透射光的干涉圖樣有一很強的均勻背景 $I_0(1-2\,\mathrm{R})$ ，條紋的對比度很低。而反射光的射條紋對比度達 1，可知在低反射率時觀察反射條紋有利。

在高反射率時，即 R~1 時， $\sin^2(\delta/2)$ 前面的係數 $4R/(1-\mathrm{R})^2 \gg 1$ ，因此 $I_T$ 對相位差 $\delta$ 的變化非常敏感，當 $\delta$ 稍微偏離 $2k\pi$ 時，$I_T$ 便會從極大值快速下降，即干涉條紋銳利度大。根據強度互補性，反射條紋中的亮紋反而因此變寬，可知在高反射率時觀察透射條紋有利。

**思考題 3**

Fabry–Pérot 干涉儀的色分辨本領為

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \pi k \frac{\sqrt{R}}{1-R}$$

由於 Fabry–Pérot 干涉儀屬於長程干涉儀，其腔長 $L$ 很長，從而干涉條紋的級數 k 很高，加上兩端面鍍金屬反射率 R 很高，因此其色分辨本領高。

Fabry–Pérot 干涉儀的色散本領為

$$\frac{\delta i_k}{\delta\lambda} = \frac{k}{2nL\sin i_k}$$

由於干涉條紋級數 k 很大，且入射角 $i_k$ 很小，故可知其色散本領大。色散本領越高，不同波長產生的相鄰級數干涉條紋容易重疊，造成不易分辨，這就是它高分辨本領但小量程的道理。

Fabry–Pérot 干涉儀可分辨的最小波長間隔為

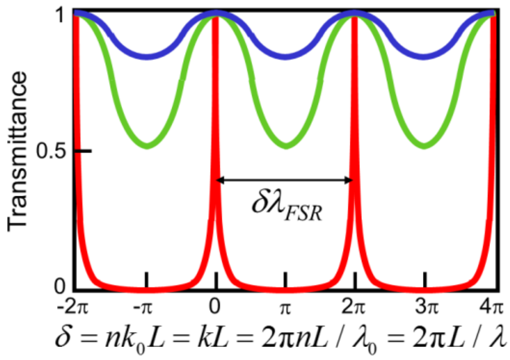
$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{\pi k}\frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

譜線的精細程度由此決定，由上式可知，腔長 $L$ 越長(即干涉條紋級數 k 越高)，且反射率 R 越大，則精度越高。

自由光譜範圍(Free Spectral Range)可決定為

$$\delta\lambda_{FSR} = \frac{\lambda^2}{L}$$

其物理意義為，相鄰級別不同波長的干涉條紋，彼此不會發生互相重疊的光譜範圍。在穿透光譜中兩個相差 $2\pi$ 的波峰之間，我們可以分辨不同波長的干涉條紋，若是兩個不同波長的波長差 $\Delta\lambda$ 大於自由光譜範圍 $\delta\lambda_{FSR}$ ，就難以分辨了。同時也可知 $\delta\lambda_{FSR}$ 和腔長 L 成反比，腔長越長，其自由光譜範圍越狹窄。




3. (40 %)

(1) 中心級別為

$$k_0 = \frac{2nL}{\lambda} = \frac{2\times1\times5\ cm}{0.6\ \mu m} \approx 1.67\times10^5$$

(2) k 級亮環的半角寬度公式為

$$\Delta\theta_k = \frac{\lambda}{2\pi nL\sin\theta_k}\frac{1-R}{\sqrt{R}} = \frac{0.6\ \mu m}{2\pi\times1\times5\ cm\times\sin(1^o)}\frac{1-0.98}{\sqrt{0.98}} = 2.2\times10^{-6}\ rad$$

(3) 色分辨本領為

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \pi k_0\frac{\sqrt{R}}{1-R} = \pi\times(1.67\times10^{-5})\frac{\sqrt{0.98}}{1-0.98} \approx 2.59\times10^7$$

可分辨的最小波長間隔為

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{2.59\times10^7} \approx 2.3\times10^{-14}\ m$$

(4) Fabry–Pérot 干涉儀的縱模頻率間隔為

$$\Delta\nu = \frac{c}{2nL} = \frac{3\times10^8}{2\times1\times0.05} = 3\times10^9\,Hz$$

白光的波長範圍為 400~760 nm，相應的頻率範圍為 $(4\sim7.5)\times10^{14}\,Hz$ ，在此範圍內包含的縱模個數(透射最強的譜線條數)為

$$\Delta N = (\nu_{\max} - \nu_{\min})\Delta\nu \approx 1.2\times10^5$$

每條譜線寬度為

$$\delta\nu = \frac{c}{2\pi nL}\frac{1-R}{\sqrt{R}} \approx 19MHz$$

換算成中心波長$\lambda = 0.6\ \mu m$附近的線寬為

$$\delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c}\delta\nu \approx 2.28\times10^{-14}\ m$$

(5) 從上題我們可知$\Delta\nu \propto \frac{1}{L}$，因此腔長的任何微小改變都會影響縱模的頻率間隔，引起譜線頻移，我們對頻率間隔$\Delta\nu$作微分可得

$$d(\Delta\nu) = d\left(\frac{c}{2nL}\right) = \frac{c}{2nL}\left(\frac{d\mathrm{L}}{L}\right) = \frac{3\times10^8}{2\times1\times0.05}\times(10^{-5}) = 3\times10^4\ \mathrm{Hz}$$

換算成中心波長$\lambda = 0.6\ \mu m$附近的波長飄移量為

$$d(\Delta\lambda) = \frac{\lambda^2}{c}d(\Delta\nu) = 3.6\times10^{-17}\ m$$